Nombre de surjections entre ensembles finis

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de E_n sur E_p.

1. Calculer $S_{n,p}$ si $p > n$.
2. Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$, et $S_{n,2}$.
3. Calculer $S_{p+1,p}$.

On suppose désormais que $0 < p \leq n$.

4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k} = 0$
5. Montrer que $0 \leq k \leq q \leq p \Rightarrow \displaystyle\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$.
6. En déduire que, si $0 \leq k < p$, alors $\displaystyle\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = 0$ (et si $k = p$?).
7. Montrer que pour tout entier q de $\{1, 2, \ldots, p\}$ le nombre d'applications de E_n dans E_p ayant un ensemble image à q éléments est égal à $\displaystyle\binom{p}{q}S_{n,q}$.
8. En déduire que $p^n = \displaystyle\sum_{q=1}^{p}\binom{p}{q}S_{n,q}$.
9. En utilisant ce qui précède, montrer que : $S_{n,p} = (-1)^p\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n$.

   Indication :
   - Transformer le second membre à l'aide de la question précédente.
   - Justifier l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=1}^{k}\cdots = \sum_{q=1}^{p}\sum_{k=q}^{p}\cdots$
10. Montrer que si $0 < p \leq n-1$, alors $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.

    Indication :
    - Étant donné une surjection φ de E_n sur E_p, considér sa restriction φ_1 à E_{n-1}.
    - Distinguer deux cas suivant que φ_1 est ou n'est pas surjective
11. Retrouver la valeur de $S_{p+1,p}$, puis montrer que $S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!$.
12. En s'inspirant du triangle de Pascal, montrer qu'on peut construire une table des $S_{n,p}$.

    Construire cette table pour $0 < p \leq n \leq 7$.