Étude d'une suite de polynômes

Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de polynômes de la variable x, définie par les relations :

$P_0(x)=2,\quad P_1(x)=x+\dfrac{1}{2},$ et $\forall\, n\geqslant 2,\ 16P_n(x)-8(2x+1)P_{n-1}(x)+P_{n-2}(x)=0$

On notera P'_n le polynôme dérivé de P_n.

1. (a) Expliciter P_2, P_3, P_4.

   (b) Déterminer le degré de P_n et le coefficient de son terme de plus haut degré.

   (c) Établir une relation entre $P_n(x)$ et $P_n(-x-1)$

   (d) Établir une relation analogue entre $P'_n(x)$ et $P'_n(-x-1)$.

   (e) Montrer que si α est racine de P_n, il en est de même de $-1-\alpha$.

   (f) Montrer qu'il existe une racine commune à tous les P_{2n+1} et à tous les P'_{2n}.

2. Dans cette question, on suppose que $-1\leqslant x\leqslant 0$.

   (a) Justifier l'existence de θ dans $[0,\frac{\pi}{2}]$ tel que $x=-\cos^2\theta$.
   Dans la suite, on pose $f_n(\theta)=P_n(-\cos^2\theta)$ et $g_n(\theta)=P'_n(-\cos^2\theta)$.

   (b) Exprimer $f_1(\theta)$ en fonction de $\cos 2\theta$ et $f_2(\theta)$ en fonction de $\cos 4\theta$.

   (c) Pour n de $\mathbb{N}$, déterminer λ_n tel que $f_n(\theta)=\lambda_n\cos 2n\theta$.

   (d) Déterminer l'ensemble des racines de P_n, pour tout $n\geqslant 1$.

   (e) On suppose $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Pour $n\geqslant 1$, exprimer $g_n(\theta)$ en fonction de $\dfrac{\sin 2n\theta}{\sin 2\theta}$.
   En déduire l'ensemble des racines du polynôme P'_n.

   (f) Calculer $P_n(0)$, $P_n(-1)$, $P'_n(0)$, $P'_n(-1)$ et $P'_{2n}(-\frac{1}{2})$ pour $n\geqslant 1$.

3. Dans cette question, on suppose que $x<-1$ ou $x>0$.

   (a) Déterminer deux fonctions λ et μ, linéairement indépendantes, telles que pour tous réels a et b, la suite de fonctions $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $z_n(x)=a\lambda^n(x)+b\mu^n(x)$ vérifie : $\forall\, n\geqslant 2,\ z_{n-2}(x)-8(2x+1)z_{n-1}(x)+16z_n(x)=0$.

   (b) Déterminer (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ P_n(x)=a\lambda^n(x)+b\mu^n(x)$.

4. Montrer que la famille $(P_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie l'équation différentielle :
   $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ 2x(x+1)P''_n(x)+(2x+1)P'_n(x)-2n^2P_n(x)=0$.
   Indication : partir de $P_n(-\cos^2\theta)=\lambda_n\cos 2n\theta$ et dériver par rapport à θ.