Sommes de projections vectorielles

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Première Partie

1. Soit p un projecteur de E et u un endomorphisme de E.
   Montrer que p et u commutent si et seulement si $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par u.
2. Soit q un projecteur de E et F un sous-espace vectoriel de E.
   Montrer que F est stable par q si et seulement si $F = (F \cap \ker q) \oplus (F \cap \operatorname{Im} q)$.
3. Déduire de ce qui précède que deux projecteurs p, q de E commutent si et seulement si :
   $E = (\ker p \cap \ker q) \oplus (\ker p \cap \operatorname{Im} q) \oplus (\operatorname{Im} p \cap \ker q) \oplus (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)$

Deuxième partie

Dans cette partie (sauf question 8), p et q sont deux projecteurs de E qui commutent.

On note : $E_1 = \ker p \cap \ker q$, $E_2 = \ker p \cap \operatorname{Im} q$, $E_3 = \operatorname{Im} p \cap \ker q$ et $E_4 = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note π_k la projection de E sur E_k parallèlement à $\oplus_{j \neq k} E_j$.

On notera $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ la décomposition d'un vecteur x de E suivant $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$.

1. (a) Calculer $p(x)$, $q(x)$, $p \circ q(x)$ en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4.
   (b) Pour p et q, que représentent $E_1 \oplus E_2$, $E_3 \oplus E_4$, $E_1 \oplus E_3$, et $E_2 \oplus E_4$?
   (c) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur. En préciser le noyau et l'image en fonction de ceux de p et q.
2. Exprimer les projecteurs Id_E, p, q et $p \circ q$ en fonction de π_1, π_2, π_3, π_4 et réciproquement.
3. Pour tous (i, j) de $\{1, 2, 3, 4\}^2$, calculer $\pi_i \circ \pi_j$.
4. En déduire que :
   $\forall (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{K}^4, \forall n \in \mathbb{N}, (\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 + \gamma\pi_3 + \delta\pi_4)^n = \alpha^n\pi_1 + \beta^n\pi_2 + \gamma^n\pi_3 + \delta^n\pi_4$
5. Exprimer $(\alpha \mathrm{Id}_E + \beta p + \gamma q + \delta p \circ q)^n$ en fonction de Id_E, p, q, et $p \circ q$.
6. Montrer que :
   (a) $E_1 = \{\overrightarrow{0}\} \Leftrightarrow p \circ q = p + q - \mathrm{Id}_E$.
   (b) $E_2 = \{\overrightarrow{0}\} \Leftrightarrow p \circ q = q$.
   (c) $E_3 = \{\overrightarrow{0}\} \Leftrightarrow p \circ q = p$.
   (d) $E_4 = \{\overrightarrow{0}\} \Leftrightarrow p \circ q = 0$.
7. (a) Montrer qu'en dehors des cas ci-dessus, la famille Id_E, p, q, $p \circ q$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Déterminer dans ce cas tous les projecteurs de E qui sont combinaisons linéaires de Id_E, p, q, et $p \circ q$ (on en trouve 16).
   (c) Déterminer les images et noyaux de ces projecteurs en fonction de ceux de p et q.
8. p et q sont maintenant deux projecteurs *quelconques* de E.
   (a) Montrer que $p + q$ est un projecteur de $E \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$.
   (b) Donner alors le noyau et l'image de ce projecteur en fonction de ceux de p et q.