Polynômes de Chebyshev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la manière suivante :

$$T_0(\mathrm{X}) = 1, \quad T_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}, \quad \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N} : \ T_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X})$$

Première partie

1. Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5.
2. Montrer que pour tout entier n :
   (a) T_n est de degré n et son terme dominant est $2^{n-1}\mathrm{X}^n$.
   (b) T_n a la parité de n.
   (c) $T_n(1) = 1$.
3. Montrer que : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \leq n \Rightarrow 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$.
4. Prouver que : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $T_m(T_n(\mathrm{X})) = T_{mn}(\mathrm{X})$.
   En déduire un isomorphisme entre $(\mathbb{N}, \times)$ et $\{T_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Deuxième partie

1. Montrer que : $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ et $T_n(\cosh\alpha) = \cosh(n\alpha)$.
2. Etablir que, pour tout $n \geq 1$, les zéros de T_n sont réels, distincts deux à deux, qu'ils sont dans $]-1, 1[$, et qu'ils sont donnés par $\forall\,k = 0,\ldots,n-1\ :\ x_k = \cos\Bigl(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\Bigr)$.
3. (a) Montrer que : $\forall\,\alpha \in\,]0,\pi[$, $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $T_n'(\cos\alpha) = n\dfrac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}$.
   (b) En déduire les extrémums de T_n (avec $n \geqslant 2$) et en quels points ils sont atteints.
4. Pour $n \geqslant 1$, décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{T_n}$ en éléments simples.
5. Montrer que : $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $(1-\mathrm{X}^2)T_n'' - \mathrm{X}T_n' + n^2T_n = 0$.

Troisième partie

Dans cette partie, P est un polynôme à coefficients réels de monôme dominant $\lambda\mathrm{X}^n$, avec $n \geq 1$.

1. Montrer que $\sup\{|P(x)|,\ x \in [-1,1]\} \geq \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
   Indication : Raisonner par l'absurde et considérer le polynôme $Q = 2^{n-1}P - \lambda T_n$.
2. Plus généralement, montrer que $\forall\,a, b\ :\ \sup\{|P(x)|,\ a \leq x \leq b\} \geq \Bigl(\dfrac{b-a}{2}\Bigr)^n \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
   Indication : Utiliser un changement de variable pour se ramener au segment $[-1, 1]$.