Triplets pythagoriciens

– On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
  On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

– On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– On appelle *triplet pythagoricien* tout triplet (x, y, z) d'entiers naturels premiers entre eux dans leur ensemble tels que $x^2 + y^2 = z^2$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble de ces triplets.

Première partie

1. Calculer les inverses des matrices A, B, et C.
2. Déterminer les Q de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 - z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   On notera en particulier que L est la seule de ces matrices qui soit symétrique.
3. Prouver que $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{T}}MLM = L\}$ est un groupe multiplicatif.
4. Montrer que les matrices de M de $\mathcal{G}$ sont caractérisées par la condition suivante :
   Pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2$.
5. Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$.
6. Vérifier que les six matrices A, B, C, J, K, L sont éléments de $\mathcal{H}$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie des matrices particulières de $\mathcal{H}$.

On note $R_k = \begin{pmatrix} 1 - 2k^2 & -2k & 2k^2 \\ 2k & 1 & -2k \\ -2k^2 & -2k & 1 + 2k^2 \end{pmatrix}$, $S_k = \begin{pmatrix} 1 - 2k^2 & 2k & 2k^2 \\ 2k & -1 & -2k \\ -2k^2 & 2k & 1 + 2k^2 \end{pmatrix}$, et $\begin{cases} \mathcal{R} = \{R_k,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{S} = \{S_k,\ k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

1. Pour tout k de $\mathbb{Z}$, vérifier que les matrices R_k et S_k sont des éléments de $\mathcal{H}$.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{H}$.
   Préciser R_k^m pour (k, m) dans $\mathbb{Z}^2$.
3. Pour tout k de $\mathbb{Z}$, montrer que la matrice $R_k - I$ est nilpotente.
4. Déterminer trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ indépendantes de k, telle que, pour tout entier naturel n et tout k de $\mathbb{Z}$, on ait l'égalité : $R_k^n = a_n R_k^2 + b_n R_k + c_n I$.
5. Montrer que $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est un sous-groupe de $\mathcal{H}$.
6. Pour tout k de $\mathbb{Z}$. Soit φ_k l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice S_k dans la base canonique.
   Identifier l'application φ_k et préciser ses éléments caractéristiques.

Troisième partie

1. Soient (x, y, z) et (x', y', z') dans $\mathbb{R}^3$, et M dans $\mathcal{H}$, tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   Montrer que $(|x'|, |y'|, |z'|) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow (|x|, |y|, |z|) \in \mathcal{T}$.
2. On se donne (x, y, z) dans $\mathcal{T}$, tel que $z > 1$, et on définit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier les inégalités $x > 0$, $y > 0$, et $0 < z' < z$.
   (b) Montrer que l'un des triplets (x', y', z'), $(-x', y', z')$ ou $(x', -y', z')$ est dans $\mathcal{T}$.
   Indication : caractériser les inégalités $x' < 0$ et $y' < 0$ en fonction de x et y.
3. (a) Montrer qu'on peut, au moyen de produits par A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, transformer en un nombre fini d'étapes un triplet pythagoricien (x_0, y_0, z_0) quelconque en $(1, 0, 1)$.
   (b) Appliquer cette méthode au triplet $(60, 91, 109)$.
   En déduire explicitement une matrice Q de $\mathcal{H}$ telle que $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 91 \\ 109 \end{pmatrix}$.
4. (a) Soient (x, y, z) et (x', y', z') dans $\mathcal{T}$.
   Montrer qu'il existe au moins une matrice M de $\mathcal{H}$ telle que $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que les M de $\mathcal{H}$ telles que $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les matrices de $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
   (c) En déduire toutes les matrices M de $\mathcal{H}$ qui vérifient l'égalité $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 91 \\ 109 \end{pmatrix}$.
   (on n'ira pas jusqu'à expliciter ces matrices.)

Quatrième partie

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles (a_n) telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+3} - 7a_{n+2} + 7a_{n+1} - a_n = 0$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Donner une base de $\mathcal{E}$ formée de suites géométriques.
2. Donner l'expression du terme général des suites suivantes de $\mathcal{E}$.
   (a) La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = u_2 = 0$. Calculer u_3 et u_4.
   (b) La suite (v_n) définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et $v_2 = 0$.
   (c) La suite (w_n) définie par $w_0 = w_1 = 0$ et $w_2 = 1$.
3. (a) Montrer que A^3 est une combinaison linéaire de I, A, A^2.
   (b) Montrer que pour n de $\mathbb{N}$, on a $A^n = u_n I + v_n A + w_n A^2$.
4. Déterminer une application injective f de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{T}$.