Matrices de Gram

Dans tout le problème E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de deux vecteurs de E.

1. On se donne u, v dans E et on note $\Delta(u,v) = \begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) \\ (v \mid u) & (v \mid v) \end{vmatrix}$.
   Montrer que $\Delta(u,v) \geqslant 0$, et que $\Delta(u,v) = 0$ si et et seulement si u, v sont liés.

2. On se donne u, v, w dans E et on note $\Delta(u,v,w) = \begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) & (u \mid w) \\ (v \mid u) & (v \mid v) & (v \mid w) \\ (w \mid u) & (w \mid v) & (w \mid w) \end{vmatrix}$.
   (a) Montrer que w s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur a combinaison linéaire de u, v et d'un vecteur b orthogonal à u et à v.
   (b) Montrer que $\Delta(u,v,a) = 0$.
   (c) Prouver que $\Delta(u,v,w) = \Delta(u,v)\,\|b\|^2$.
   (d) Montrer que $\Delta(u,v,w) \geqslant 0$, avec $\Delta(u,v,w) = 0$ si et seulement si u, v, w sont liés.

3. On va généraliser les notations et les résultats précédents.
   On note m un entier strictement positif quelconque.
   Pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de E, on note $G(u_1, \ldots, u_m)$ la matrice carrée d'ordre m et de terme général $(u_i \mid u_j)$ (à l'intersection de la ligne i et de la colonne j).
   On note $\Delta(u_1, \ldots, u_m) = \det(G(u_1, \ldots, u_m))$.
   (a) On note F le sous-espace de E engendré par $u_1, \ldots, u_{m-1}$.
   Soit $u_m = a + b$ (avec $a \in F$) la décomposition de u_m sur $E = F \oplus F^\perp$.
   Montrer que $\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, a) = 0$.
   (b) Prouver que $\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m) = \Delta(u_1, \ldots, u_{m-1})\,\|b\|^2$.
   (c) En déduire $\Delta(u_1, \ldots, u_m) \geqslant 0$ (avec $\Delta(u_1, \ldots, u_m) = 0 \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_m$ sont liés).

4. Soit F un sous-espace de E, de base $u_1, \ldots, u_m$.
   Soit $d(x,F)$ la distance d'un vecteur x à F. Montrer que $d(x,F)^2 = \dfrac{\Delta(u_1, \ldots, u_m, x)}{\Delta(u_1, \ldots, u_m)}$.

5. Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E.
   Soit $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ une famille de n vecteurs de E.
   Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) Il existe une isométrie vectorielle f de E tel que : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ f(e_k) = \varepsilon_k$.
   (b) Les matrices $G(e_1, \ldots, e_n)$ et $G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sont égales.