Famille de matrices et déterminants

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont trois réels quelconques. On pose $I = M(1,0,0)$, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

PARTIE I

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   En donner la dimension et une base.
2. Calculer, en fonction de I, J, K les produits J^2, K^2, JK et KJ.
3. Montrer que E est muni d'une structure d'anneau commutatif.

PARTIE II

1. Exprimer $\det(M(a,b,c))$ comme un produit de trois facteurs linéaires par rapport à a, b, c.
2. A quelles conditions $M(a,b,c)$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   Montrer alors, sans la calculer, que sa matrice inverse est dans E.
3. Montrer que le sous-ensemble de E formé des matrices $M(a,b,c)$ de rang inférieur ou égal à 2 est la réunion de trois plans vectoriels $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ dont on donnera une base (on notera $\mathcal{P}_1$ celui de ces plans qui est caractérisé par l'égalité $a = c$).
4. Montrer que le sous-ensemble de E formé des matrices $M(a,b,c)$ de rang inférieur ou égal à 1 est la réunion de trois droites vectorielles $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$, que l'on précisera.
   Montrer que ces droites sont les intersections deux à deux des plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$.
5. On considère toutes les matrices M de $\mathcal{P}_1$ qui sont effectivement de rang 2.
   On leur associe un endomorphisme f_M de $\mathbb{R}^3$ (rapporté à sa base canonique).
   Montrer que tous ces endomorphismes ont le même image et le même noyau.

PARTIE III

Soient a et c deux réels. On pose $N = aI + cK$, $A = \frac{1}{2}(I+K)$ et $B = \frac{1}{2}(I-K)$

1. (a) Calculer AB, BA, et pour tout entier $n \geqslant 1$, A^n et B^n.
   (b) Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que $N = xA + yB$.
   (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de N^n.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est N dans la base canonique.
   (a) Montrer que $\varepsilon_1 = (1,0,1)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice N' de f dans cette base.
   (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de N^n.