Exercice 1

Vous êtes commissaire de police, chargé d'élucider le cambriolage d'une banque. Vous savez que le ou les coupables du cambriolage sont parmi les trois suspects : Arthur, Bob et Charlie.

Vous disposez des indices suivants, tous exacts.

— I_1 : *si Bob a trempé dans cette affaire, Charlie aussi.*

— I_2 : *pour les hold-up de banques, Arthur a horreur de faire équipe avec Charlie.*

— I_3 : *si Arthur est coupable et Bob innocent, alors Charlie est coupable.*

— I_4 : *Si Charlie est dans le coup, il n'a pas pu faire ce genre de boulot tout seul.*

Avec un tableau de vérité, déterminer le ou les coupables du cambriolage.

Indication : noter A la proposition "Arthur est coupable" (de même pour B et C) et exprimer les indices I_1, I_2, I_3, I_4 en fonction de A, B, C.

Exercice 2

1. Soient m, n deux entiers naturels.
   Montrer que $m^2 + n^2$ est divisible par 3 si et seulement si m, n sont tous deux divisibles par 3.
2. En déduire que le seul quadruplet (x, y, z, t) de $\mathbb{N}^4$ tel que $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$ est $(0, 0, 0, 0)$.

Exercice 3

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et pour tout p de $\mathbb{N}$, on note $S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $S_5(n) + S_7(n) = 2\, S_1^4(n)$.

Exercice 4

Soit E un ensemble fini non vide, et soit a un élément fixé de E.

1. Montrer que l'application φ qui à X associe $X \,\Delta\, \{a\}$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur lui-même.
2. En déduire que dans $\mathcal{P}(E)$, il y a autant de parties paires que de parties impaires.

Exercice 5

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, donner une expression simple de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{2n}{2k}$.

Exercice 6

Vous êtes commissaire de police, chargé d'élucider le cambriolage d'une banque. Vous savez que le ou les coupables du cambriolage sont parmi les trois suspects : Arthur, Bob et Charlie.

Vous disposez des indices suivants, tous exacts.

— I_1 : *si Charlie est innocent, Arthur est coupable.*

— I_2 : *si Arthur est coupable, il a agi avec un complice et un seul.*

— I_3 : *si Bob n'a pas trempé dans cette affaire, Charlie non plus.*

— I_4 : *s'il y a exactement deux coupables dans cette affaire, Arthur est l'un d'eux.*

Avec un tableau de vérité, déterminer le ou les coupables du cambriolage.

Indication : noter A la proposition "Arthur est coupable" (de même pour B et C) et exprimer les indices I_1, I_2, I_3, I_4 en fonction de A, B, C.

Exercice 7

1. Soient m, n deux entiers naturels.
   Montrer que $m^2 + n^2$ est divisible par 7 si et seulement si m, n sont tous deux divisibles par 7.

2. En déduire que le seul triplet (x, y, z) de $\mathbb{N}^3$ tel que $x^2 + y^2 = 7z^2$ est $(0, 0, 0)$.

Exercice 8

Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3} = \dfrac{2n(n+1) - 1}{3}$

Exercice 9

Soit E un ensemble fini. Pour toutes parties X et Y de E, on note $d(X, Y) = \operatorname{card}(X \Delta Y)$.

1. Montrer qu'on a toujours $d(X, Y) \leqslant \operatorname{card}(X) + \operatorname{card}(Y)$, et dire à quelle condition il y a égalité.

2. Pour toutes parties A, B, C de E, montrer que $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$.

3. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $A \cap B \subset C \subset A \cup B$.

Exercice 10

Pour tout n de $\mathbb{N}$, donner une expression simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}$.