Exercices de début d'année

Exercice 1

Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$ dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal du plan.

Pour tout réel a, soit $T_1(a)$, $T_2(a)$ les tangentes à $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ en leur point d'abscisse a.

Montrer que les droites $T_1(a)$ et $T_2(a)$ restent orthogonales et qu'elles découpent sur l'axe des abscisses un segment de longueur constante.

Exercice 2

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+6}\,\mathrm{e}^x$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Dresser le tableau de variations de f et tracer approximativement (mais pas grossièrement) sa représentation graphique sur $[-8, 2]$. On donne $\mathrm{e}^{-3} \approx 0.0498$ et $\mathrm{e}^{-4} \approx 0.0183$.

Exercice 3

On se propose de calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

On pose pour tout réel x de $[0, 1]$, $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Dites pourquoi la fonction $x \mapsto J(x)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et préciser sa dérivée J'.
2. Pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on pose $F(x) = J(\tan(x))$.

   Montrer que, pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a $F(x) = x$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 4

$ABCD$ est un rectangle, avec $AB = 10$ et $BC = 6$.

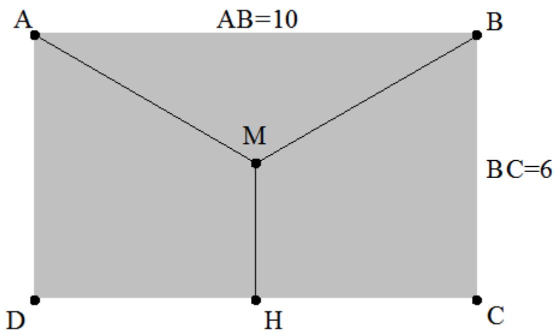
H est le milieu du segment $[DC]$.

M est intérieur à ce rectangle, sur la médiatrice de $[DC]$.

On note θ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}})$.

Exprimer en fonction de θ la somme $MA + MB + MH$.

Préciser pour quelle valeur de θ cette somme est minimum et calculer la valeur de ce minimum.



Exercice 5

On considère deux suites (réelles ou complexes) $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$,
définies par la donnée de a_0 et b_0, et, pour tout entier naturel n, par les relations
$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} \\[2mm] b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$$
Montrer que ces deux suites convergent et calculer leur limite.

Indication : utiliser deux suites auxiliaires $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 6

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle et le point A a pour coordonnées $(a;b)$, avec $b \leqslant 0$.

1. Quand un point M décrit $\mathscr{C}$, montrer que la distance AM passe par un minimum absolu, pour un point M_0 unique de $\mathscr{C}$.
2. Montrer que M_0 est l'unique M de $\mathscr{C}$ tel que (AM) soit orthogonale à la tangente à $\mathscr{C}$ en M.

Exercice 7

Dans le plan orienté, on définit le triangle OAB et on note M le milieu du segment $[AB]$.

On construit les triangles AOD et OBC directs, rectangles et isocèles en O.

Étudier les longueurs et les positions relatives des segments $[OM]$ et $[DC]$.

Indication : utiliser les affixes, l'origine du plan complexe étant en O.

Exercice 8

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}\cdot$

Soit A, B, C les points de $\mathscr{H}$ d'abscisses a, b, c (réels non nuls, deux à deux distincts).

Soit H l'orthocentre (point de concours des hauteurs) du triangle ABC.

Montrer que H appartient à $\mathscr{H}$ et que (en notant h son abscisse) : $abch = -1$.

Exercice 9

À chaque lancer d'une pièce équilibrée, on associe 1 si le résultat est “Pile”, et -1 sinon.

Calculer la probabilité que la somme des résultats soit nulle après n lancers ($n \geqslant 1$).

Exercice 10

1. Notons $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $v_1 = 3$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{n} + 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

   Il est clair que tous les v_n sont strictement positifs.

   (a) Soit n un entier, $n \geqslant 1$. Montrer que si $v_{n+1} < v_n$ alors $v_{n+2} < v_{n+1}$.

   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_1 = a$ (avec a dans $\mathbb{C}$) et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

Exercice 11

Pour tout entier $n \geqslant 4$ on considère les deux nombres entiers $A(n) = 3n^2 - n + 1$ et $B(n) = 2n - 1$.

Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste dans la division enclidienne de $A(n)$ par $B(n)$.