Problème : étude d'un espace de matrices carrées d'ordre 3

Dans l'algèbre $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes, on note E l'ensemble des matrices $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b+c & b+c & b+c \\ b & a+b & b \\ b-c & b-c & a+b-c \end{pmatrix}$, avec (a,b,c) dans $\mathbb{C}^3$.

On note $I = M(1,0,0)$, $J = M(0,1,0)$, et $K = M(0,0,1)$.

On note $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

I. Généralités sur l'ensemble (E), et étude de certains éléments de (E)

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
   En donner la dimension et une base.
2. Montrer que E est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_3(\mathbb{C}), +, \times)$.
   L'anneau E est-il commutatif ?
3. Déterminer les matrices M de E qui vérifient l'égalité $M^2 = I$.
4. Dans cette question, on pose $S = M\Big(1, -\dfrac{2}{3}, c\Big)$.
   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice est S dans la base canonique.
   Préciser la nature de f, et ses éléments caractéristiques. Indication : $w = (2-3c, 2, 2+3c)$.

II. Calcul de la puissance n-ième d'une matrice de E

On fixe a, b, c. Pour simplifier on note M plutôt que $M(a,b,c)$. On pose $L = bJ + cK$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer L^n en fonction de b, n, L.
2. En déduire, si $b \neq 0$, une expression de M^n (avec $n \geqslant 0$) en fonction de n, a, b, I, L.
3. Dans cette question, on suppose $ab(a+3b) \neq 0$. Montrer que M est inversible et que l'expression de M^n obtenue en (II.2) est encore valable pour les exposants n de $\mathbb{Z}^{-*}$.
4. Dans cette question, on suppose $b = 0$. Calculer M^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
   Montrer en quoi le résultat obtenu est cohérent avec celui de la question (II.2).

III. Changements de base ; inversibilité des éléments de E

On fixe la valeur des scalaires a, b, c, et pour simplifier on note M plutôt que $M(a,b,c)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice est M dans la base canonique.
On définit les vecteurs $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (b+c, b, b-c)$.

1. Montrer que u_1, u_2, u_3 forment une base de $\mathbb{C}^3$ si et seulement si $b \neq 0$.
2. On suppose $b \neq 0$. Déterminer la matrice D de f dans la base u_1, u_2, u_3.
3. On suppose $b = 0$. Montrer que les vecteurs u_1, u_2, e_1 forment une base de $\mathbb{C}^3$, et calculer la matrice T de f dans cette base.
4. Déduire de (III.2) et (III.3) que $M(a,b,c)$ est inversible si et seulement si $a(a+3b) \neq 0$.