La décomposition LU d'une matrice inversible

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une décomposition "LU" de A est une égalité $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure (L pour "Low") à diagonale unité (tous les coefficients diagonaux valent 1), et où U est une matrice triangulaire supérieure (U pour "Up").

$$\text{Par exemple,}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -9 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier k de $\{1, \ldots, n\}$, on appelle *sous-matrice principale d'ordre k de A*, la sous matrice A_k formée à l'intersection des k premières lignes et des k premières colonnes de A.
Par exemple, avec la matrice A de l'exemple précédent :

$$A_1 = (\,2\,),\quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -9 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Dans tout le problème, la matrice A est supposée inversible.

Partie I

Dans cette partie, on voit une condition nécessaire et suffisante portant sur la matrice A pour qu'elle admette une décomposition LU.

1. Montrer que la décomposition LU de A, si elle existe, est unique.
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ possède une décomposition LU.

   Montrer en revanche que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'en possède pas.
3. On suppose que la matrice A possède une décomposition LU.
   Montrer que toutes ses sous-matrices principales sont inversibles. Pour cela, on utilisera une décomposition par blocs de A, L, U, sous la forme suivante :

   $$A = \begin{pmatrix} A_k & A'_k \\ A''_k & A'''_k \end{pmatrix},\quad L = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ L''_k & L'''_k \end{pmatrix},\quad U = \begin{pmatrix} U_k & U'_k \\ 0 & U'''_k \end{pmatrix}$$

4. Montrer que la réciproque de la propriété précédente est vraie : si toutes les sous-matrices principales de A sont inversibles, alors A possède une décomposition LU.
   Pour cela, on raisonnera par récurrence sur l'ordre n de A : dans le passage du rang n au rang $n+1$, on écrira $L_{n+1} = \begin{pmatrix} L_n & 0 \\ R_n & 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = \begin{pmatrix} U_n & C_n \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ où R_n est une matrice-ligne de largeur n, C_n est une matrice-colonne de hauteur n, et λ_n est un scalaire.
5. Conclusion ?

Partie II

Dans cette partie, on suppose que la matrice A possède une décomposition LU et on voit comment mettre en œuvre une méthode de calcul des matrices L et U.

On note a_{ij}, ℓ_{ij}, et a_{ij} les termes généraux de A, L, U.

1. A titre d'exemple, trouver la décomposition LU de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}$.
2. On revient maintenant au cas général.
   Ecrire les égalités donnant a_{ik} en fonction des ℓ_{ij} (avec $j \leqslant i$) et u_{jk} (avec $j \leqslant k$).
3. En déduire les expressions :
   (a) De u_{ik}, pour $i \leqslant k$, en fonction de a_{ik}, de ℓ_{ij} $(j < i)$, de u_{jk} $(j < i)$.
   (b) De ℓ_{ik}, pour $i > k$, en fonction de a_{ik}, de ℓ_{ij} $(j < k)$, de u_{jk} $(j \leqslant k)$.
4. Montrer comment les égalités obtenues permettent de calculer de proche en proche (et on précisera dans quel ordre) tous les coefficients de L et de U.

Partie III

On sait qu'il existe des matrices A qui n'ont pas de décomposition LU.

Dans cette partie, on va voir que pour une telle matrice, il est possible de trouver une matrice inversible "simple" P telle que PA admette une décomposition LU.

On appelle *matrice de permutation* toute matrice P_σ d'ordre n dont le terme général p_{ij} peut s'écrire $p_{ij} = \delta_{i,\sigma(i)}$ (notations de Kronecker), où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Si par exemple $n = 4$ et σ est définie par $\begin{cases} \sigma(1) = 3 \\ \sigma(2) = 2 \\ \sigma(3) = 4 \\ \sigma(4) = 1 \end{cases}$, alors $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Dans cette question, on étudie quelques propriétés des matrices de permutation.
   (a) Que représente P_σ si σ est la permutation "identité" de $\{1, \ldots, n\}$?
   (b) Soient σ et s deux permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que $P_\sigma P_s = P_{\sigma \circ s}$.
   (c) Montrer que toute matrice P_σ est inversible. Quel est son inverse ?
2. On va étudier l'influence du produit par une matrice de permutation.
   (a) Avec la matrice A du préambule et la matrice P_σ de l'exemple ci-dessus, calculer les produits $P_\sigma A$ et AP_σ^{-1}. Que remarque-t-on ?
   (b) Plus généralement, pour toute matrice A d'ordre n, et toute matrice de permutation $P = P_\sigma$, comment passe-t-on de A à PA et de A à AP^{-1} ?
3. On va montrer que pour toute matrice carrée A inversible et d'ordre n, il existe une matrice de permutation P telle que la matrice PA possède une décomposition LU.
   Pour cela, on raisonne par récurrence sur n.
4. Montrer que c'est évident si $n = 1$.
   On suppose donc que la propriété est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$ et on se donne une matrice carrée A inversible et d'ordre $n + 1$.

(a) Montrer qu'il existe une matrice de permutation S telle que la sous-matrice principale B_n d'ordre n de $B = SA$ soit inversible.

(b) En appliquant l'hypothèse de récurrence à B_n, montrer qu'il existe une matrice de permutation Q telle que QB admette une décomposition LU.

(c) Conclure.

5. Montrer très simplement que la décomposition $PA = LU$ n'est en général pas unique. Combien peut-il exister de triplets (P, L, U) au maximum ?

Partie IV

Dans cette partie, M est une matrice quelconque d'ordre n, de coefficients m_{ij}.

On va étudier l'influence qu'ont certaines opérations sur les lignes ou les colonnes de M et interpréter ces opérations par des produits à gauche ou à droite par des matrices triangulaires inférieures à diagonale unité. Posons tout d'abord quelques notations :

— On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: la matrice E_{ij} est celle dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1.

— Pour tous indices i et j (avec $i \neq j$) et tout scalaire α, on note $\mathrm{L}_j \gg \mathrm{L}_j - \alpha \mathrm{L}_i$ l'opération qui consiste à retrancher à la ligne d'indice j de M le produit par α de sa ligne d'indice i.

— On note $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ l'opération qui consiste à échanger les lignes d'indices i et j de M.

— On définit également les opérations $\mathrm{C}_j \gg \mathrm{C}_j - \alpha \mathrm{C}_i$ et $\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$ sur les colonnes de M.

— Pour tout j de $\{1, \ldots, n-1\}$, et à condition que le coefficient diagonal m_{jj} soit non nul, on note $\varphi_j(M)$ la matrice obtenue en appliquant successivement à M les opérations :
$$\mathrm{L}_i \gg \mathrm{L}_i - \lambda_{ij} \mathrm{L}_j, \text{ avec } \lambda_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_{jj}}, \text{ pour tout } i \text{ de } \{j+1, \ldots, n\}$$
Dans cette opération, dont le but est d'annuler les coefficients sous-diagonaux de la colonne d'indice j de M, le coefficient diagonal m_{jj} est appelé le *pivot*.

1. Pour tout couple d'indices (i, j), comparer les lignes de la matrice $E_{ij}M$ et celles de M. Comparer aussi les colonnes de ME_{ij} et celles de M.
2. Montrer qu'une opération du type $\mathrm{L}_i \gg \mathrm{L}_i - \alpha \mathrm{L}_j$, avec $i > j$, transforme une matrice M en une matrice $M' = SM$, où $S = I_n - \alpha E_{ij}$ (et S est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, ne dépendant que de i, j, α.)
3. Avec les notations précédentes, identifier la matrice S^{-1} et interpréter le produit MS^{-1} comme une opération sur les colonnes de M.
4. Montrer que si on transforme M en une matrice M' par une opération du type φ_j, alors il existe une matrice R triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $RM = M'$. Détailler les coefficients de R.
5. Avec les notations de la question précédente, interpréter le produit MR^{-1} comme une opération sur les colonnes de M.

Partie V

Dans cette partie, A est une matrice carrée d'ordre n, inversible. On reprend les notations de la partie III, notamment en ce qui concerne les opérations φ_j.

On suppose que la matrice A possède une décomposition LU.

1. Montrer qu'on peut appliquer l'opération φ_1 à la matrice A, et qu'on transforme ainsi A en une matrice B dont les coefficients sous-diagonaux de colonne 1 sont nuls.)
2. Soit k un entier de $\{2, \ldots, n\}$.

   On suppose qu'on a appliqué à A les opérations $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1}$ (dans cet ordre) et qu'on a ainsi transformé A en une matrice C dont les coefficients sous-diagonaux des $k-1$ premières colonnes sont nuls.

   Montrer que le k-ième coefficient diagonal de C est non nul.
3. En déduire qu'on peut partir de A et appliquer successivement $\varphi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$. Montrer que la matrice obtenue est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, et qu'elle est la matrice U de la décomposition $A = LU$.
4. Montrer comment on peut construire la matrice L de la décomposition $A = LU$, en appliquant à la matrice I_n une succession d'opérations sur les colonnes, chacune de ces opérations correspondant à l'une de celles qui ont permis de passer de la matrice A à la matrice U.
5. Appliquer ce qui précède à la recherche de la décomposition de la matrice A utilisée dans le préambule de l'énoncé.

Partie VI

Dans cette partie, A est une matrice carrée d'ordre n, qui est seulement supposée inversible.

On se propose d'obtenir une décomposition $PA = LU$ (au sens de la partie III) par le biais d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

A la panoplie des opérations φ_i définies dans la partie IV, on ajoute les opérations θ_i^j : pour toute matrice M, $\theta_i^j(M)$ est la matrice obtenue échange des lignes d'indices i et j de M.

On pourra considérer que $\theta_{ii}(M) = M$.

1. Montrer qu'on peut appliquer une opération $\theta_{i_1}^1$ puis l'opération φ_1 à la matrice A, de manière à la transformer A en une matrice B dont les coefficients sous-diagonaux de colonne 1 sont nuls.
2. Soit k un entier de $\{2, \ldots, n\}$.

   On suppose qu'on a appliqué A les opérations $\theta_{i_1}^1$, φ_1, $\theta_{i_2}^2$, φ_2, $\ldots$, $\theta_{i_{k-1}}^{k-1}$, φ_{k-1} (dans cet ordre, avec $i_1 \geqslant 1$, $i_2 \geqslant 2$, $\ldots$, $i_{k-1} \geqslant k-1$).

   On a ainsi transformé A en une matrice $C = (c_{ij})$ dont les coefficients sous-diagonaux des $k-1$ premières colonnes sont nuls.

   Montrer que l'un au moins des coefficients c_{ik}, avec $i \geqslant k$, est non nul.
3. Montrer qu'il existe $n-1$ entiers $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (avec $i_k \geqslant k$) tels que la succession (dans cet ordre) des opérations $\theta_{i_1}^1$, φ_1, $\ldots$, $\theta_{i_k}^k$, φ_k, $\ldots$, $\theta_{i_{n-1}}^{n-1}$, φ_{n-1} transforme A en une matrice U triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.