Crochet de Lie et projections vectorielles

Dans tout le problème :
- n est un entier naturel non nul
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  On notera $A = (a_{i,j})$ pour exprimer que A est une matrice dont le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est $a_{i,j}$. On pourra également noter $a_{i,j} = [A]_{i,j}$.
- E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie n.
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
  Pour tous éléments f, g de $\mathcal{L}(E)$, on note $[\,f, g\,] = f \circ g - g \circ f$.
- $\mathcal{P}_E$ désigne l'ensemble des projecteurs (projections vectorielles) de E.

Première partie

On rappelle que si $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la « trace de A » est $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Montrer que si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
2. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
3. Justifier comment et pourquoi on peut définir la trace d'un endomorphisme de E.
4. Montrer si p est dans $\mathcal{P}_E$, alors $\operatorname{tr}(p)$ est égale au rang de p.

Deuxième partie

1. Rappeler pourquoi il est possible de définir la trace d'un endomorphisme de E.
2. Rappeler pourquoi la trace d'un projecteur est égale à son rang.
3. Soient p dans $\mathcal{P}_E$, et f dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $[\,p, f\,] = \alpha p$, avec $\alpha \neq 0$.
   Montrer que p est l'application nulle.
4. Sur l'ensemble $\mathcal{P}_E$, on pose $p\,\mathcal{R}\,q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p$.
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_E$ (c'est-à-dire qu'elle est réflexive, transitive et anti-symétrique).
5. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{K}^4$. On pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Soit p dans $\mathcal{L}(E)$, de matrice A dans la base canonique.
   (a) Montrer que p est un projecteur de E.
   Préciser une base (ε') de l'image de p, et une base (ε'') du noyau de p.
   On note alors (ε) la base de E obtenue par juxtaposition de (ε') et de (ε'').
   (b) Caractériser par leur matrice dans (ε) les f de $\mathcal{L}(E)$ tels que $[\,p, f\,] = 0$.
   Interpréter le résultat obtenu en termes de stabilité.
   (c) Caractériser par leur matrice dans (ε) les projecteurs q de E tels que $p\,\mathcal{R}\,q$.
6. Soit p un élément quelconque de $\mathcal{P}_E$, et soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$.
   Montrer que $[\,p, f\,] = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.
7. Soient p, q deux projecteurs de E tels que $[\,p, q\,] = 0$.
   (a) Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont dans $\mathcal{P}_E$.
   (b) Montrer que, au sens de la relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}_E$:
   – Le projecteur $p \circ q$ est le plus grand des minorants de p et q.
   – Le projecteur $p + q - p \circ q$ est le plus petit des majorants de p et q.

Troisième partie

Dans cette partie, on se donne f, g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $[\,f, g\,] = \alpha\, f + \beta\, g$, avec α, β dans $\mathbb{K}$.

1. Dans cette question, on suppose $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$. Ainsi $[\,f, g\,] = \alpha\, f$, avec $\alpha \neq 0$.
   (a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ on a : $[\,f^k, g\,] = \alpha\, k f^k$.
   (b) On suppose que $f^m \neq 0$, avec $m \geqslant 0$.
   Montrer alors que les applications $\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^m$ sont libres dans $\mathcal{L}(E)$.
   (c) Déduire de ce qui précède que l'endomorphisme f est nilpotent.
2. Dans cette question, on suppose que f, g sont deux éléments distincts de $\mathcal{P}_E$.
   On suppose également que α n'est ni égal à 0, ni égal à 1.
   (a) Montrer que $2\alpha\, g \circ f + \beta(1+\alpha)g = \alpha(1-\alpha)f$.
   (b) En déduire $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, g$, puis $g \circ f = f$.
   (c) On suppose $f \neq 0$. Montrer que $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g$.
   (d) Réciproquement, montrer que si p, q sont deux projecteurs tels que $\begin{cases} \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p \\ q \circ p = p \end{cases}$, alors on a l'égalité $[\,p, q\,] = q - p$.
   (e) On reprend les notations de la question I.4
   Caractériser par leur matrice dans (ε) les q de $\mathcal{P}_E$ tels que $[\,p, q\,] = q - p$.
3. Dans cette question, on suppose que f, g sont distincts de $\mathcal{P}_E$, avec $f \neq 0$.
   On suppose également que α n'est ni égal à 0, ni égal à -1.
   (a) Montrer que : $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$, $f \circ g = f$, $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = 1$, $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.
   (b) Réciproquement, montrer que si p, q sont deux projecteurs tels que $\begin{cases} \mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q \\ p \circ q = p \end{cases}$, alors on a l'égalité $[\,p, q\,] = p - q$.
   (c) On reprend les notations de la question I.4
   Caractériser par leur matrice dans (ε) les q de $\mathcal{P}_E$ tels que $[\,p, q\,] = p - q$.