Chapitre 2.
Réduction des endomorphismes

Jean-Michel Ferrard

www.mathprepa.fr

Table des matières du chapitre 2

2.1. Éléments propres

2.1.1. Éléments propres d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un endomorphisme de E.

Proposition (droite stable par un endomorphisme)

Soit D une droite vectorielle de E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- la droite vectorielle D est stable par u (c'est-à-dire $u(D) \subset D$).
- il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall x \in D,\ u(x) = \lambda x$ (càd $u_{|D} = \lambda \mathrm{Id}_D$).
- il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, et il existe x non nul dans D, tels que $u(x) = \lambda x$.

Définition (vecteurs propres d'un endomorphisme)

Soit x un vecteur **non nul** de E. On dit que x est *vecteur propre* de u si la droite vectorielle $D = \mathbb{K}x$ est stable par u. Cela équivaut à l'existence d'un (unique) scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$.

2.1.1. Éléments propres d'un endomorphisme

Définition (valeurs propres, spectre d'un endomorphisme)

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, et soit λ un scalaire. On dit que λ est *valeur propre* de u s'il existe un vecteur $x \neq 0$ dans E tel que $u(x) = \lambda x$.

L'ensemble (éventuellement vide) des valeurs propres de u est appelé le *spectre* de u, et noté $\mathrm{Sp}(u)$.

- Le vecteur x est propre pour $u \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x \end{cases}$

  Le scalaire λ est déterminé par x, et : $\forall\, y \in \mathbb{K}x,\ u(y) = \lambda y$.
- Pour exprimer que la droite $D = \mathbb{K}x$ est stable par u, on dit aussi que D est une *droite vectorielle propre de* u.
- Dire que λ est dans $\mathrm{Sp}(u)$, c'est dire qu'il existe dans E des « vecteurs propres pour la valeur propre λ ».

2.1.1. Éléments propres d'un endomorphisme

Trois propositions synonymes

On a les équivalences :

$$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{Id})(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id})$$

Les propositions suivantes sont donc synonymes :

- λ est valeur propre de u
- $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$
- l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas injectif.

Definition (sous-espace propre d'un endomorphisme)

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, et soit λ dans $\mathrm{Sp}(u)$.

Le sous-espace $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\}$ est appelé le *sous-espace propre* de u pour la valeur propre λ.

2.1.1. Éléments propres d'un endomorphisme

Remarques de terminologie

- Par définition, un sous-espace propre n'est **jamais** réduit à $\{0\}$.
- Un sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par u : la restriction de u à $E_\lambda(u)$ est en effet l'application $x \mapsto \lambda x$ (l'homothétie de rapport λ si $\lambda \neq 0$, et l'application nulle sinon).
- Soit λ une valeur propre de u. Les vecteurs propres de u pour λ sont les éléments <u>non nuls</u> de $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.

  Ou encore : $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ est formé des vecteurs propres de u pour λ <u>et</u> du vecteur nul.
- Si x est vecteur propre de u, c'est pour une seule valeur propre (l'unique λ tel que $u(x) = \lambda x$). En revanche, il y a une infinité de vecteurs propres de u pour λ : ce sont les $x \neq 0$ de E_λ.

2.1.1. Éléments propres d'un endomorphisme

Cas particuliers

- On suppose que E n'est pas réduit à $\{0\}$.
  Si $u = \lambda \mathrm{Id}$, alors $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$ et $E_\lambda(u) = E$.
- Réciproquement, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$ n'implique pas $u = \lambda \mathrm{Id}$.
  Par exemple, soit $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $u(x, y) = (y, 0)$.
  On a $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$ mais u n'est pas l'application nulle.
- Le scalaire 0 est dans $\mathrm{Sp}(u)$ si et seulement si u est non injectif.
  Le sous-espace propre associé est alors $E_0(u) = \mathrm{Ker}\,(u)$.

2.1.1. Éléments propres d'un endomorphisme

Quelques exemples simples

- Le spectre de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ défini par $u(P) = XP$ est vide.
- Le spectre de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $u(x, y) = (-y, x)$ est vide.
- Le spectre de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ défini par $u(x, y) = (-y, x)$ est $\{-i, i\}$.
- Le spectre de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ défini par $u(P) = XP'$ est $\mathbb{N}$.
- Le spectre de $u \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ défini par $u(f) = f'$ est $\mathbb{R}$.
- On suppose que $E = F \oplus G$, avec $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$.
  Soit p la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G.
  Alors $\mathrm{Sp}(u) = \{0, 1\}$, avec $\begin{cases} E_0(p) = \mathrm{Ker}\,(p) = G \\ E_1(p) = \mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\,(p) = F \end{cases}$

2.1.1. Éléments propres d'un endomorphisme

Exercice

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Soit T définie sur E par

$$T(f)(0) = f(0) \quad \text{et} \quad T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \text{ pour } x > 0$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(T)$; T est-elle injective ? surjective ?
3. Valeurs propres non nulles de T ? Sous-espaces propres ?

2.1.1. Éléments propres d'un endomorphisme

Exercice

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Soit $\lambda \neq 0$. On suppose que λ est valeur propre de vu.
   Montrer que λ est valeur propre de uv.
2. Étudier le cas particulier $\lambda = 0$, d'abord si E est de dimension finie, puis dans le cas général.

2.1.2. Éléments propres d'une matrice carrée

Definition (éléments propres d'une matrice carrée)

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les éléments propres de A sont ceux de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Un scalaire λ est *valeur propre* de A s'il existe une matrice-colonne X **non nulle** telle que $AX = \lambda X$.
- Le *spectre* de A est l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ des valeurs propres de A.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, les *vecteurs propres* de A pour λ sont les colonnes X **non nulles** telles que $AX = \lambda X$.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, le *sous-espace propre* de A pour λ est l'ensemble des colonnes X telles que $AX = \lambda X$.

2.1.2. Éléments propres d'une matrice carrée

Plus généralement :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}$.

Soit u un endomorphisme de E, de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

Pour $x \in E$, soit $[x]_{\mathcal{B}}$ la colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$.

Pour tout scalaire λ, et pour tout x de E, on a :

$$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow [u(x)]_{\mathcal{B}} = \lambda [x]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow A[x]_{\mathcal{B}} = \lambda [x]_{\mathcal{B}}$$

En d'autres termes :

- Les valeurs propres de A sont celles de u, donc le spectre de A est celui de u.
- Les vecteurs propres de A sont les colonnes des composantes (dans $\mathcal{B}$) des vecteurs propres de u.

2.1.2. Éléments propres d'une matrice carrée

Proposition (caractérisation des valeurs propres pour une matrice)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit λ un scalaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- λ est une valeur propre de A ;
- la matrice $\lambda I_n - A$ n'est pas inversible ;
- le déterminant $\det(\lambda I_n - A)$ est nul ;
- il existe une matrice $X \neq 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AX = \lambda X$.

Proposition (deux matrices transposées ont le même spectre)

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A et A^{T} ont les mêmes valeurs propres.

2.1.2. Éléments propres d'une matrice carrée

Exercice

Déterminer les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$.

Remarque sur les matrices à coefficients réels :

Si une matrice A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle est aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On pose alors la question : valeurs propres dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$.

- La seule valeur propre réelle de A est 1.
- Les valeurs propres complexes de A sont 1, i, et $-i$.
- On pourra écrire : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, i, -i\}$.

2.1.2. Éléments propres d'une matrice carrée

Proposition (éléments propres de deux matrices semblables)

Soit A et B deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il existe donc P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Alors $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A)$. Plus précisément :

La colonne X est vecteur propre de B si et seulement si PX est vecteur propre de A (et pour la même valeur propre).

Interprétation :

On sait que les matrices A et B sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, chacune dans une certaine base de E.
On a alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(u)$.

2.1.3. Propriétés générales des éléments propres

On traduira les résultats suivants en termes matriciels.

Proposition (stabilité des sous-espaces propres quand $uv = vu$)

Soit u et v deux endomorphismes de E, tels que $uv = vu$.

Alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

Plus généralement, les sev propres de $P(u)$ sont stables par $Q(v)$.

Proposition (les sous-espaces propres sont en somme directe)

Soit $(\lambda_i)_{1\le i\le p}$ des valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{L}(E)$.

Les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe.

Si x_i est vecteur propre pour λ_i, les $(x_i)_{1\le i\le p}$ sont libres.

Si $\dim(E)=n$ tout $u\in\mathcal{L}(E)$ a au plus n valeurs propres distinctes.
Il en est de même pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1.3. Propriétés générales des éléments propres

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

Polynômes d'endomorphismes et valeurs propres

Soit x un vecteur propre de u pour λ.

Pour tout m de $\mathbb{N}$, x est vecteur propre de u^m pour λ^m.

Pour tout P de $\mathbb{K}[X]$, x est vecteur propre de $P(u)$ pour $P(\lambda)$.

Polynômes annotateurs et valeurs propres

Si P est un polynôme annulateur de u, toute valeur propre de u est une racine de P (réciproque fausse).

Spectre d'un endomorphisme nilpotent

Si u est endomorphisme nilpotent, alors : $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.
Si A est une matrice nilpotente, alors : $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

2.2. Polynôme caractéristique

2.2.1. Mise en route, dans les cas $n = 2$ et $n = 3$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On pose $P(x) = \det(xI_2 - A)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} \\ &= (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc \\ &= x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A) \end{aligned}$$

Ainsi P est unitaire, de degré 2, et on constate que :

$$\begin{aligned} P(A) &= A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $P(x) = \det(xI_2 - A)$ annule A (à suivre...)

2.2.1. Mise en route, dans les cas $n = 2$ et $n = 3$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ et $\det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-a & -b & -c \\ -a' & x-b' & -c' \\ -a'' & -b'' & x-c'' \end{vmatrix}$.

Pour $x = 0$, ce déterminant vaut $\det(-A)$, c'est-à-dire $-\det(A)$.

On développe (par exemple) par rapport à la première colonne :

$$\det(xI_3 - A) = (x-a)\begin{vmatrix} x-b' & -c' \\ -b'' & x-c'' \end{vmatrix} + a'\begin{vmatrix} -b & -c \\ -b'' & x-c'' \end{vmatrix} - a''\begin{vmatrix} -b & -c \\ x-b' & -c' \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)(x^2-(b'+c'')x+b'c''-b''c') + a'(-bx+bc''-b''c) - a''(cx+bc'-b'c)$$

$$= x^3 - (a+b'+c'')x^2 + \alpha x - \det(A) = x^3 - \operatorname{tr}(A)x^2 + \alpha x - \det(A)$$

On a donc obtenu (inutile ici de préciser la valeur de α) :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \det(xI_3 - A) = x^3 - \operatorname{tr}(A)x^2 + \alpha x - \det(A)$$

2.2.1. Mise en route, dans les cas $n = 2$ et $n = 3$

À titre d'exemple, considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P(x) &= \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -2 & x-1 & -2 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^3 - 4(x-1) = (x-1)(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

On constate que :

$$P(A) = (A - I_3)(A + I_3)(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Là encore, $P(x) = \det(xI_3 - A)$ annule A (à suivre...)

2.2.2. Définition du polynôme caractéristique

Proposition (un polynôme attaché à une matrice carrée)

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La fonction $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est polynomiale unitaire de degré n.

$\forall\, x \in \mathbb{K},\ \det(xI_n - A) = x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

Définition (polynôme caractéristique d'une matrice carrée)

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$ est appelé *polynôme caractéristique* de A.

Rappelons que : $\chi_A(x) = x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

2.2.2. Définition du polynôme caractéristique

Remarques

- Le coefficient constant de χ_A est $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$.

  Ce coefficient est non nul si et seulement si A est inversible, ce qui est logique : dire que $\chi_A(0) \neq 0$, c'est dire que 0 n'est pas valeur propre de A, c'est donc dire que A est inversible.

- On commet souvent l'abus d'écriture : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

  Le programme ne prévoit en effet que des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et ici X est dans $\mathbb{K}[X]$.

- Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonale ou triangulaire.

  Le polynôme caractéristique de A est : $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{i,i})$.

2.2.2. Définition du polynôme caractéristique

Proposition (polynôme caractéristique de la matrice transposée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: A et A^{T} ont même polynôme caractéristique.

Proposition (polynôme caractéristique de 2 matrices semblables)

Soit A et B deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A et B ont le même polynôme caractéristique.

Exercice

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible.
Exprimer $\chi_{M^{-1}}$ en fonction de χ_M.

Exercice

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

2.2.2. Définition du polynôme caractéristique

Définition (polynôme caractéristique d'un endomorphisme)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Le *polynôme caractéristique* χ_u de u est celui de la matrice A de u dans une base quelconque $\mathcal{B}$.

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_u(x) = \det(xI_n - A) = \det(x\,\mathrm{Id} - u)$.

Par abus d'écriture, on note $\chi_u(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - u)$.

C'est un polynôme unitaire de degré n.

Remarques

- On a encore l'expression développée :

  $\chi_u(X) = X^n - \mathrm{tr}\,(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.
- Si $u = \lambda\mathrm{Id}$, alors $\chi_u(X) = (X - \lambda)^n$.

2.2.3. Polynôme caractéristique et valeurs propres

Proposition (valeurs propres = racines du poly. caractéristique)

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ dans $\mathbb{K}$.

Alors λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine de χ_A.

On a le même énoncé pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie : dire que λ est valeur propre de u, c'est dire que λ est racine du polynôme caractéristique χ_u.

On retiendra donc la proposition :

"Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique"

2.2.3. Polynôme caractéristique et valeurs propres

Définition (multiplicité d'une valeur propre)

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ dans $\mathrm{Sp}(A)$.

- On appelle *multiplicité* de λ (en tant que valeur propre de A) la multiplicité m_λ de λ en tant que racine de χ_A.
- On parle de valeur propre *simple*, *double*, *triple*, etc. si cette multiplicité vaut 1, 2, 3, etc.
- On parle de valeur propre *multiple* si cette multiplicité est strictement supérieure à 1.

On a la même définition pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie : la multiplicité d'une valeur propre λ de u est celle de λ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_u.

2.2.3. Polynôme caractéristique et valeurs propres

Cas particulier important :

Les valeurs propres λ d'une matrice triangulaire (en particulier celles d'une matrice diagonale !) sont ses coefficients diagonaux, et leurs multiplicités sont leur nombres d'occurrences sur la diagonale.

Proposition (dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$)

Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou tout endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \geq 1$, admettent exactement n valeurs propres (chacune d'elles étant comptée autant de fois que sa multiplicité).

Exercice

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \geq 1$.
On suppose que u et v commutent.
Montrer que u et v ont au moins un vecteur propre en commun.

2.2.3. Polynôme caractéristique et valeurs propres

Proposition (cas où le polynôme caractéristique est scindé)

Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On suppose que χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$ (toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

- La trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A.
- De même $\det(A)$ est égal au produit des valeurs propres de A.

(chaque λ de $\mathrm{Sp}(A)$ est comptée autant de fois que sa multiplicité)

Proposition (valeurs propres complexes d'une matrice réelle)

Soit λ une valeur propre *complexe* d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de A, avec la même multiplicité.

De plus, si la matrice-colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifie $A\,X = \lambda\,X$, alors on a l'égalité $A\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$.

2.2.4. Polynôme caractéristique et sous-espaces stables

Proposition (polynôme caractéristique de A triangulaire par blocs)

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, triangulaire par blocs : $M = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix}$.

Alors $\chi_M = \chi_P \chi_S$.

Cela se généralise à un nombre quelconque de blocs diagonaux.

Proposition (polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension $n \geq 1$.

Soit F un sous-espace de E, stable par u. Soit $v = u_{|F}$.

Alors le polynôme χ_v divise le polynôme χ_u.

2.2.4. Polynôme caractéristique et sous-espaces stables

Proposition (majoration de la dimension d'un sous-espace propre)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension $n \geq 1$.

Soit λ une valeur propre de u, de multiplicité m_λ.

Soit d_λ la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$.

Alors on a les inégalités : $1 \leq d_\lambda \leq m_\lambda$.

On a un énoncé analogue pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On retiendra : « *la dimension d'un sev propre est toujours inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante* ».

Conséquence importante :

Pour une valeur propre simple (c'est-à-dire de multiplicité 1), le sous-espace propre est nécessairement une droite vectorielle.

2.3. Diagonalisation et trigonalisation

2.3.1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition (en dimension finie, endomorphisme diagonalisable)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension $n \geq 1$.
On dit que u est *diagonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E (dite *base de diagonalisation*) dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Dire que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale, c'est dire que $\mathcal{B}$ est formée de vecteurs propres de u.

Définition (matrice carrée diagonalisable)

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
On dit alors que $D = P^{-1}AP$ est une *réduite diagonale* de A.

Si B est semblable à A diagonalisable, alors B est diagonalisable.

2.3.1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Équivalence des deux définitions précédentes :

Soit u un endomorphisme de E, de matrice A dans une base $\mathcal{B}$.

- Si u est diagonalisable, soit $\mathcal{B}'$ une base de diagonalisation de u.
  Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
  La matrice $D = P^{-1}AP$ de u dans $\mathcal{B}'$ est diagonale.
  La matrice A est donc diagonalisable.
- Réciproquement, on suppose que A est diagonalisable.
  Soit P inversible et D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.
  On interprète P comme une matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
  La matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est la matrice diagonale $P^{-1}AP = D$.
  L'endomorphisme u est donc diagonalisable.

2.3.1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Remarques terminologiques

- On identifie souvent A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'endomorphisme $\widehat{A}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par $X \mapsto AX$ (dans ce cas A est la matrice de l'endomorphisme $\widehat{A}$ dans la base canonique).
- Dire que la matrice A est diagonalisable, c'est dire que l'endomorphisme $\widehat{A}$ est diagonalisable, et l'égalité $D = P^{-1}AP$ (où D est diagonale) exprime que la matrice inversible P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à une base de vecteurs propres de l'endomorphisme $\widehat{A}$.
- Les coefficients de la diagonale de D sont alors les valeurs propres de $\widehat{A}$ (c'est-à-dire celles de A), chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.
- Dans la pratique, il n'y a pas grand risque à identifier A et $\widehat{A}$.

2.3.1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Proposition (conditions de diagonalisabilité d'un endomorphisme)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie $n \geq 1$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

- L'endomorphisme u est diagonalisable.
- L'espace E est la somme (directe) des sous-espaces propres de u.
- La somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension n de E.
- Le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour tout λ de $\mathrm{Sp}(u)$, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est égale à la multiplicité de λ comme racine de χ_u.

2.3.1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Proposition (conditions de diagonalisabilité d'une matrice)

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- La matrice A est diagonalisable.
- La somme des dimensions des sev propres de A est égale à n.
- Le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour tout λ de $\mathrm{Sp}(A)$, la dimension du sous-espace propre associé à λ est égale à la multiplicité de λ comme racine de χ_A.

2.3.1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Exercice

Dire, sans calculs, pourquoi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice

À quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice

Dire à quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *n'est pas* diagonalisable.

2.3.1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Proposition (condition suffisante de diagonalisabilité d'un endom.)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie $n \geq 1$.
Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites.

Proposition (condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable (et les sev propres sont des droites de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

Exercice

1. Montrer que $\varphi\colon P \to X(X-1)P' - nXP$ définit un endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces propres de φ.

2.3.1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Exercice

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, avec $\dim(E) = n \geq 1$.

On suppose que u possède n valeurs propres distinctes.

Soit v dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer : $uv = vu \iff v$ s'écrit $v = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$.

Diagonalisabilité avec une seule valeur propre

- Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie $n \geq 1$.
  Si u n'a qu'une seule valeur propre λ, de multiplicité n, alors u est diagonalisable si et seulement si $u = \lambda \mathrm{Id}$.
- De même si A (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) n'a que la valeur propre λ (ce qui est le cas par exemple si A est triangulaire avec des λ sur toute la diagonale), alors A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda \mathrm{I}_n$.

2.3.1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Diagonalisabilité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une matrice réelle

Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels.

- Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle l'est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (avec le même spectre) : l'égalité $A = PDP^{-1}$ (avec D diagonale et P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) reste en effet vraie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- En revanche, A peut être diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notamment si certaines des valeurs propres de A sont complexes non réelles.
- Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 + 1$.

  A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (son polynôme caractéristique n'est pas scindé), mais elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (deux valeurs propres distinctes : i et $-i$).

2.3.2. Applications de la diagonalisation

Pratique de la diagonalisation

On se propose de diagonaliser une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{K}$, alors A n'est pas diagonalisable.
- Sinon, pour tout λ de $\mathrm{Sp}(A)$ (de multiplicité m_λ dans χ_A), les solutions de $AX = \lambda X$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ forment le sev propre $E_\lambda(A)$, dont on trouve la dimension d_λ et une base $\mathcal{B}_\lambda$.
- S'il existe λ tel que $d_\lambda < m_\lambda$, A n'est pas diagonalisable.
- Sinon on juxtapose les $\mathcal{B}_\lambda$ en une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres.
  Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
- La matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale : ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, dans l'ordre qui correspond à celui des vecteurs propres formant la base $\mathcal{B}$.

2.3.2. Applications de la diagonalisation

On peut mener les calculs avec la méthode du pivot.

- On part de la matrice $A_\lambda = \lambda \mathrm{I_n} - A$ que l'on transforme, par des opérations sur les lignes, en une matrice triangulaire T_λ.
- Les valeurs propres de A sont les λ tels que T_λ est non inversible c'est-à-dire qui annulent au moins un coefficient diagonal de T_λ.
- Pour chacune d'elles, on obtient le sev propre en résolvant le système $T_\lambda X = 0$, qui équivaut au système $AX = \lambda X$.

Exercice

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2.3.2. Applications de la diagonalisation

Puissances d'une matrice diagonalisable

Soit A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $A = PDP^{-1}$ (D diagonale).

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$.

On généralise à $k \in \mathbb{Z}$ si A est inversible, c'est-à-dire si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

Rappel : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

Attention avec $k = 0$ (car $D^0 = I_n$) si l'un des λ_i est nul.

Exemple : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $k \geq 1$ mais pas $k = 0$.

2.3.2. Applications de la diagonalisation

Exercice

On pose $M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ et notamment $J=M(0,1,0)$.

Trouver P inversible, telle que $P^{-1}M(a,b,c)P$ soit diagonale.

Exercice

1. Soit D une matrice diagonale à coefficients diagonaux distincts. Déterminer les matrices qui commutent avec D.
2. Résoudre $X^2+X=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice

Résoudre $X^2=M$, où $M=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2.3.2. Applications de la diagonalisation

Étude d'une récurrence linéaire d'ordre p

On se donne les scalaires $(\alpha_k)_{1\leq k\leq p}$.

Soit $(\mathcal{S})$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{K}$ telles que :

$$(R_L) : \ \forall n \geq p,\ u_n = \alpha_1 u_{n-1} + \alpha_2 u_{n-2} + \cdots + \alpha_p u_{n-p}$$

C'est-à-dire : $\forall n \geq p,\ u_n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_{n-k}$

On dit que (R_L) est une relation de récurrence linéaire d'ordre p.

$A = X^p - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X^{p-k}$ est le polynôme caractéristique de (R_L).

On dit que $(\mathcal{C})$: $A(x) = 0$ est l'équation caractéristique de (R_L).

2.3.2. Applications de la diagonalisation

Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_{n-p+1} \end{pmatrix}$ $(n \geq p-1)$ et $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a la relation matricielle (R_M) : $\forall\, n \geq p,\ X_n = MX_{n-1}$

On en déduit : $\forall\, n \geq p-1,\ X_n = M^{n-p+1}X_{p-1}$.

Proposition (polynôme caractéristique d'une matrice compagnon)

Avec les notations précédentes pour M et $A = X^p - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X^{p-k}$:

On dit que M est la matrice compagnon de A.

On a alors : $\chi_M = X^p - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X^{p-k}$.

Le polynôme caractéristique de M (dans la relation (R_M)) est donc celui de la récurrence linéaire (R_L).

2.3.3. Diagonalisation et polynômes annulateurs

Proposition (théo. de Cayley-Hamilton, pour un endomorphisme)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie $n \geq 1$.

Soit χ_u son polynôme caractéristique (il est unitaire de degré n).

Alors $\chi_u(u) = 0$. Le polynôme caractéristique de u est donc un polynôme annulateur de u.

Proposition (théo. de Cayley-Hamilton, pour une matrice carrée)

Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soit χ_A son polynôme caractéristique (il est unitaire de degré n).

Alors $\chi_A(A) = 0$. Le polynôme caractéristique de A est donc un polynôme annulateur de A.

2.3.3. Diagonalisation et polynômes annulateurs

Exercice

Soit u un automorphisme de E (avec $\dim(E) = n \geq 1$).

Montrer que u^{-1} est un polynôme en u.

Proposition (CNS de diagonalisabilité pour un endomorphisme)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie $n \geq 1$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- L'endomorphisme u est diagonalisable.
- Le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u.
- u admet un polynôme annulateur à racines simples.

2.3.3. Diagonalisation et polynômes annulateurs

Proposition (CNS de diagonalisabilité, pour une matrice carrée)

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- La matrice A est diagonalisable.
- La matrice A admet un polynôme annulateur à racines simples.
- Le polynôme $\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)$ est annulateur de A.

Exercice

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inversible et diagonalisable.

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $B^2 = A$.

Montrer que B est diagonalisable.

2.3.3. Diagonalisation et polynômes annulateurs

Remarque importante :

On suppose $P(u)=0$, avec $P=\prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i)$ (et les $\alpha_i \neq$ 2 à 2).

Alors $E=\bigoplus_{i=1}^{m} E_{\alpha_i}$, avec $E_{\alpha_i}=\operatorname{Ker}(u-\alpha_i\mathrm{Id})$.

Il en résulte que u est diagonalisable, avec $\mathrm{Sp}(u)\subset\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$.

On a l'*inclusion* car certains E_{α_i} peuvent être réduits à $\{0\}$.

Par exemple, si $(u+3\mathrm{Id})(u-2\mathrm{Id})=0$, alors u est diagonalisable et $E=E_{-3}\oplus E_2$, donc $\mathrm{Sp}(u)\subset\{-3,2\}$.

- Si $E_{-3}=\{0\}$ (donc si $-3\notin\mathrm{Sp}(u)$), alors $u=2\mathrm{Id}$.
- Si $E_2=\{0\}$ (donc si $2\notin\mathrm{Sp}(u)$), alors $u=-3\mathrm{Id}$.
- Sinon le spectre de u est exactement égal à $\{-3,2\}$.

2.3.3. Diagonalisation et polynômes annulateurs

Exercice (diagonalisation par blocs)

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $A \otimes M = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A \otimes M)(B \otimes N) = (AB) \otimes (MN)$.
2. Montrer que $(A, M$ inversibles$) \Rightarrow (A \otimes M)^{-1} = A^{-1} \otimes M^{-1}$.
3. Prouver que $(A, M$ diagonalisables$) \Rightarrow (A \otimes M$ diagonalisable$)$.

Proposition (restriction d'un endomorphisme diagonalisable)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Soit F un sev, stable par u.
La restriction $v = u_{|F}$ est un endomorphisme diagonalisable de F.

Exercice

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisables. On suppose que $fg = gf$.
Montrer que f, g sont diagonalisables dans une même base de E.

2.3.4. Trigonalisation

Définition (en dimension finie, endomorphisme trigonalisable)

On dit qu'un endomorphisme u de E est *trigonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ (dite base de trigonalisation) de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Définition (matrice carrée trigonalisable)

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.

On dit alors que $T = P^{-1}AP$ est une *réduite triangulaire* de A.

Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A (répétées selon leurs multiplicités).

2.3.4. Trigonalisation

Équivalence des deux définitions précédentes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E.

- On suppose u trigonalisable. Soit $\mathcal{B}'$ une base de trigonalisation.

  Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

  Avec ces notations, la matrice (triangulaire supérieure) de u dans $\mathcal{B}'$ est $T = P^{-1}AP$. Donc A est trigonalisable.

- Réciproquement, on suppose que A est trigonalisable.

  Soit P inversible et T triangulaire sup. telles que $A = PTP^{-1}$.

  P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$.

  La matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est la matrice triangulaire supérieure $P^{-1}AP = T$, donc u est trigonalisable.

2.3.4. Trigonalisation

Exercice

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. Calculer A^n, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Proposition (CNS de trigonalisabilité d'un endomorphisme)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension $n \geq 1$.
(u est trigonalisable) $\Leftrightarrow$ (χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$)

Proposition (CNS de trigonalisabilité d'une matrice)

($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable) $\Leftrightarrow$ (χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$)

En particulier : toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou tout endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, est trigonalisable.

2.3.4. Trigonalisation

Exercice

Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Une conséquence de la trigonalisabilité

Soit u un endomorphisme trigonalisable de E $(\dim(E) = n \geq 1)$.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, non nécessairement distinctes.

Soit P un polynôme. Alors $P(u)$ est trigonalisable et ses valeurs propres sont $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$.

En particulier, pour $k \in \mathbb{N}^*$, u^k est trigonalisable et ses valeurs propres sont $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ (idem pour $k \in \mathbb{Z}^{-*}$ quand A est inversible, c'est-à-dire si $\lambda_i \neq 0$ pour tout i).

2.3.4. Trigonalisation

Proposition (caractérisation des matrices carrées nilpotentes)

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice A est nilpotente (il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$).
2. Le polynôme caractéristique de A est X^n.
3. La matrice A est semblable à une matrice strictement triangulaire supérieure.
4. La puissance n-ième de A est nulle (donc l'indice de nilpotence de u est inférieur ou égal à n).

2.3.4. Trigonalisation

Proposition (caractérisation des endomorphismes nilpotents)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension $n \geq 1$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est nilpotent (il existe $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$).
- Le polynôme caractéristique de u est X^n.
- Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est strictement triangulaire supérieure.
- On a $u^n = 0$ (donc l'indice de nilpotence est $\leq n$).

Exercice

Peut-on diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? La trigonaliser ?