Accélération de convergence pour une série

On se propose de trouver une valeur approchée de la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Pour tout entier $N \geqslant 1$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$.

1. (a) Justifier l'existence de la somme S, le signe de R_N et un majorant de $|R_N|$.
   (b) Donner un majorant de l'erreur commise dans l'approximation $S \approx S_N + \dfrac{1}{2} u_{N+1}$.
   Avec ce résultat, combien faudrait-il de termes pour calculer S à 10^{-4} près ?
2. Pour $n \geqslant 1$, on note $u'_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.
   (a) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$
   (b) En déduire la convergence de la série $\sum u'_n$.
   (c) Montrer que $S_{2N} = S'_N$ et $R_{2N} = R'_N$, avec $S'_N = \sum_{n=1}^{N} u'_n$ et $R'_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u'_n$.
3. (a) Montrer que $u'_n \sim v_n - v_{n-1}$, avec $v_n = -\dfrac{1}{2\sqrt{2n}}$.
   (b) Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $w_n = u'_n - (v_n - v_{n-1})$.
   Justifier la convergence de $\sum w_n$ et montrer que $R'_N = \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n$.
4. (a) Montrer qu'on peut écrire $w_n = f(n)$, où $f(t)$ est croissante négative.
   (b) En déduire que $F(n) - F(n-1) \leqslant w_n \leqslant F(n+1) - F(n)$, l'application F étant définie par $F(t) = \sqrt{2t-1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2t} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2t-2}$.
   (c) Former le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
   (d) Donner un équivalent de $F(t)$ quand $t \to \infty$.
5. (a) Montrer que $-F(N) \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n \leqslant -F(N+1)$.
   (b) Montrer que $t \to \Delta(t) = F(t) - F(t+1)$ est une fonction décroissante de t.
   Donner un équivalent de $\Delta(t)$ quand $n \to \infty$.
6. Les questions précédentes montrent donc que, pour tout $N \geqslant 1$.
   $S = S_{2N} + R_{2N} = S_{2N} + R'_N = S_{2N} + \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n$.
   On a donc l'encadrement : $S_{2N} + \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} - F(N) \leqslant S \leqslant S_{2N} + \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} - F(N+1)$.
   On sait enfin que l'amplitude de cet encadrement est une fonction décroissante de l'entier N et tend vers 0 avec la vitesse de $N^{-5/2}$. Montrer qu'il suffit de choisir $N = 14$ pour connaître S à 10^{-4} près. Quel est l'encadrement obtenu ?