Irrationalité de $\exp(r)$ et de $\ln(r)$, avec r rationnel

Le but de ce problème est de prouver que :

— Si r est un rationnel non nul, le nombre e^r est irrationnel.

— Si r est un rationnel strictement positif et distinct de 1, le nombre $\ln r$ est irrationnel.

On désigne par $\mathbb{Z}[X]$ l'anneau des polynômes (fonctions polynomiales) à coefficients entiers.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit les polynômes $U_n(x) = \dfrac{1}{n!}(x - x^2)^n$ et $L_n(x) = U_n^{(n)}(x)$.

Enfin, on rappelle la *formule d'intégration par parties répétée* :

Soit f, g deux applications numériques de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ (avec $a < b$).

Alors : $$\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f^{(n-k)}(t)g^{(k-1)}(t)\Big]_a^b + (-1)^n\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \quad (\mathrm{I})$$

1. (a) Soit A dans $\mathbb{Z}[X]$, et n dans $\mathbb{N}$. On définit le polynôme $B(x) = \dfrac{x^n}{n!}A(x)$.
   Pour tout k de $\mathbb{N}$, montrer que $B^{(k)}(0)$ est dans $\mathbb{Z}$.

   (b) Pour tout k de $\mathbb{N}$, montrer que $U_n^{(k)}(0)$ et $U_n^{(k)}(1)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, et tout n de $\mathbb{N}$, on note $R_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{xt}L_n(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Prouver l'égalité $R_n(x) = (-x)^n\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{xt}\,U_n(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire $R_n(x) \neq 0$ si $x \neq 0$.

   (b) Déduire de (a) l'inégalité $|x^{n+1}R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{2n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{4^n\,n!}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1}R(x) = 0$.

   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer qu'il existe P_n et Q_n dans $\mathbb{Z}[X]$, tous deux de degré n, et tels que $x^{n+1}R_n(x) = Q_n(x)\mathrm{e}^x - P_n(x)$ pour tout réel x.

3. (a) On se donne un entier relatif non nul m.
   Utiliser la question précédente pour établir l'existence de deux suites $(p_n)_{n\geqslant 0}$ et $(q_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{Z}$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(q_n\mathrm{e}^m - p_n) = 0$, avec $q_n\mathrm{e}^m - p_n \neq 0$ pour tout n.

   (b) Par un raisonnement par l'absurde, en déduire que e^m est irrationnel.

   (c) Montrer que pour tout rationnel non nul r, le réel e^r est irrationnel.

   (d) Montrer que pour tout rationnel $r > 0$ (et $r \neq 1$), le réel $\ln r$ est irrationnel.