TD n°25 : exercices de géométrie euclidienne

Notations

— Si x, y, b, etc. sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ (avec n dans $\mathbb{N}^*$), on note X, Y, B, etc. les matrices colonnes de leurs composantes dans la base canonique.

— Pour tout $n \geqslant 1$, on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique défini par $(x \mid y) = {}^{\mathrm{t}}XY$, et de la norme qui lui est associée, définie par $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

Exercice 1

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal.
2. Donner une base orthonormale de $\mathrm{Im}\,(p)$ et une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. On pose $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{3}(-2, 2, 1)$, $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{3}(1, 2, -2)$ et $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{3}(-2, -1, -2)$.
   Montrer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. Donner l'expression de A^n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 3

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 4

Soit p, r deux projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geqslant 1$) tels que $p \circ r = r \circ p$.

1. Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(p \circ r) = \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(r)$.
3. *En déduire* que $\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$

Exercice 5

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ (avec $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$).

1. Soit y un élément de $\mathbb{R}^n$.
   Montrer qu'il existe x dans $(\mathrm{Ker} f)^\perp$ et y' dans $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ tels que $y = f(x) + y'$.
2. Montrer qu'un tel couple (x, y') est unique.
   On peut donc définir l'application g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui au vecteur y associe le vecteur x.
3. Montrer que g est linéaire. On l'appelle l'application *pseudo-inverse* de f.
4. Déterminer le noyau et l'image de g.
5. (a) Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^p$ sur $(\mathrm{Ker} f)^\perp$.
   (b) Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 6

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, de matrice A dans les bases canoniques.

Soit b un élément de $\mathbb{R}^n$. On considère l'équation (E) : $f(x) = b$, où x est inconnu dans $\mathbb{R}^p$.

(E) équivaut au système (S) : $AX = B$, où B est donné dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et X cherché dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) ou bien est vide ou bien est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$ dont on précisera la direction.
2. Montrer qu'il existe au moins un x_0 de $\mathbb{R}^p$ tel que $\|b - f(x_0)\| = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \|b - f(x)\|$
   Indication : utiliser la projection vectorielle orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\operatorname{Im}(f)$.
   On dira alors que x_0 est une *pseudo-solution* de (E).
3. Montrer que x_0 est pseudo-solution de (E) si et seulement si : $\forall\, x \in \mathbb{R}^p,\ (f(x) \mid b - f(x_0)) = 0$.
4. En déduire que les pseudo-solutions x_0 de (E) s'obtiennent en résolvant ${}^{\mathrm{t}}AAX_0 = {}^{\mathrm{t}}AB$.
5. Application : déterminer la (ou les) pseudo-solution(s) de $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$