Une décomposition LU

1. On pose $u_1 = 2$ et $\forall\, n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

   Calculer u_n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2. On définit la matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   On définit alors les matrices $A_1, A_2, \dots, A_n$ par :

   — $A_1 = A$.

   — Pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, A_{i+1} se déduit de A_i par l'opération : $\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} + \dfrac{1}{u_i}\mathrm{L}_i$.

   Déterminer A_n, et en déduire que A est inversible.

3. On considère le système $AX = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

   On définit $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ par :

   — $y'_1 = y_1$.

   — Pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, $y'_{i+1} = y_{i+1} + \dfrac{1}{u_i} y'_i$.

   Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, montrer que $AX = Y \Leftrightarrow A_i X = Y'_i$, avec $Y'_i = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

4. Dans cette question la colonne Y est définie par $\begin{cases} y_k = 1 \\ y_i = 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$

   (a) Avec les notations précédentes, calculer y'_i, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$.

   (b) Déterminer alors la solution du système $AX = Y$.

5. Déduire de ce qui précède l'expression de la matrice A^{-1}.

6. On revient aux notations de la question 2.

   Déterminer deux matrices L et U telles que $A = LU$, où :

   — L est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux valent 1.

   — U est une matrice triangulaire supérieure.

7. Calculer le déterminant Δ_n de la matrice A :

   (a) En utilisant le résultat de la question précédente.

   (b) Par un calcul direct, utilisant une récurrence sur l'ordre n de la matrice A.