TD n°22 : suites récurrentes matricielles

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $X_0 = 0$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M^k$.

1. Calculer AB, BA, A^2, et B^2. En déduire A^k, B^k, et M^k pour tout $k \geqslant 1$.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer X_n en fonction de I, A, B.
3. (a) On pose $Y = I - M$. Montrer que Y est inversible et calculer Y^{-1}.

   (b) Prouver que pour tout $n \geqslant 0$, on a $X_n = Y^{-1}(I - M^n)$.
4. Soit α un réel distinct de 1, et soit λ un réel non nul.

   On définit une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ par la donnée de y_0 dans $\mathbb{R}$ et par : $\forall\, n \geqslant 1,\ y_n = \alpha y_{n-1} + \lambda n^2$.

   (a) Montrer qu'il existe une suite du type $n \mapsto P_n = a + bn + cn^2$ telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait l'égalité $P_n = \alpha P_{n-1} + \lambda n^2$ (on calculera a, b, c en fonction de α et λ.)

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $x_n = y_n - P_n$.

   Calculer x_n puis y_n en fonction de n, α, λ, y_0.
5. On définit la suite (S_n) de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ par :

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = MS_{n-1} + N$ où $S_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

   Montrer que $S_n = M^n S_0 + X_n N$ pour tout n de $\mathbb{N}$. En déduire S_n.
6. On définit la suite (S_n) de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ par :

   $\forall\, n \geqslant 1,\ S_n = MS_{n-1} + N_n$ où $S_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $N_n = \begin{pmatrix} 2m^2 \\ m^2 \\ -2m^2 \end{pmatrix}$

   Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $S_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} u_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n \\ v_n = 2\alpha_n - \beta_n - \gamma_n \\ w_n = \alpha_n - 2\beta_n + \gamma_n \end{cases}$

   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = n^2$.

   (b) Établir une relation de récurrence entre v_n et v_{n-1}.

   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

   (c) Établir une relation de récurrence entre w_n et w_{n-1}.

   En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

   (d) En déduire finalement l'expression de S_n pour tout n de $\mathbb{N}$.