TD n°20 : images et noyaux itérés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit f un endomorphisme de E.
On pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$, et pour tout entier $k \geq 1$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

1. Montrer que $(\mathrm{Im}\, f^k)_{k\geq 0}$ et $(\mathrm{Ker}\, f^k)_{k\geq 0}$ forment respectivement une suite décroissante et une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E stables par f.
2. Montrer que si $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$, alors $\forall\, m \geq k :\ \mathrm{Ker}\, f^m = \mathrm{Ker}\, f^k$.
3. Montrer que si $\mathrm{Im}\, f^k = \mathrm{Im}\, f^{k+1}$, alors $\forall\, m \geq k :\ \mathrm{Im}\, f^m = \mathrm{Im}\, f^k$
4. Montrer successivement :
   (a) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \iff E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f$.
   (b) $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2 \iff \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{\overrightarrow{0}\}$.
   (c) $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$ et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
5. Soit s (en supposant qu'il existe) le plus petit k tel que $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$.
   Soit r (en supposant qu'il existe) le plus petit k tel que $\mathrm{Im}\, f^k = \mathrm{Im}\, f^{k+1}$.
   On veut montrer que $r = s$.
   (a) Montrer que si $s \leq r$, alors $\mathrm{Im}\, f^s = \mathrm{Im}\, f^r$, puis $s = r$.
   (b) Prouver que si $r \leq s$, alors $\mathrm{Ker}\, f^s = \mathrm{Ker}\, f^r$, puis $s = r$.
   (c) Conclure à l'égalité $r = s$.
   (d) Montrer que $E = \mathrm{Im}\, f^r \oplus \mathrm{Ker}\, f^r$.
   (e) Etablir que la restriction de f à $\mathrm{Ker}\, f^r$ est nilpotente.
   (f) Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f^r$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}\, f^r$.
6. On suppose que E est de dimension finie n.
   (a) Montrer que les entiers r et s existent, et que $r = s \leq n$.
   (b) Montrer que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \iff \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
7. Donner un exemple des situations suivantes :
   (a) L'entier r existe, mais pas l'entier s.
   (b) L'entier s existe, mais pas l'entier r.
   (c) Aucun des entiers r et s n'existe.