

TD n°19 : polynômes et racines

Dans ce problème, on considère des polynômes à coefficients complexes.

Un polynôme est dit *normalisé* si le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

1. Un polynôme Q , normalisé de degré 2, s'écrit : $Q(X) = X^2 + pX + q$.
On note a et b ses zéros, distincts ou non.
 - (a) Calculer $a^2 + b^2$ et $(ab)^2$ en fonction de p et q .
 - (b) Déterminer p et q pour que les zéros de Q soient a^2 et b^2 .
2. Soit A un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $A(X) = (X - a)(X - b)$.
Donner la liste des polynômes A tels que $A(X)$ divise $A(X^2)$.
3. Soit B un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $B(X) = (X - a)(X - b)$.
 - (a) Donner la liste des polynômes B tels que $B(X)$ divise $B(X^3)$.
 - (b) Montrer (sans l'aide de cette liste) que si $B(X)$ est l'un de ces polynômes, alors $B(-X)$ en est un aussi.
4. Un polynôme $P(X) = X^3 + pX^2 + qX + r$, normalisé de degré 3, a pour zéros a, b, c .
 - (a) Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2$ en fonction des coefficients p, q, r .
 - (b) Déterminer p, q, r pour que les zéros de P soient a^2, b^2 et c^2 .
 - (c) Donner la liste de ces polynômes P et vérifier que pour chacun d'eux :
 $P(X^2) = -P(X)P(-X)$.
5. Parmi les polynômes P précédents, on notera F_1 et F_2 les deux polynômes qui ne sont pas à coefficients tous réels.
 - (a) Calculer le produit $F_1(X)F_2(X)$.
 - (b) Donner, sous forme trigonométrique, les zéros de chacun des polynômes F_1 et F_2 .
 - (c) Former les polynômes normalisés de degré 3 ayant pour zéros les parties réelles des zéros de F_1 et F_2 .
 - (d) Former les polynômes normalisés Φ_1 et Φ_2 , de degré 3, ayant pour zéros les parties imaginaires des zéros des polynômes F_1 et F_2 .
 - (e) Former le polynôme H tel que : $H(X) = 64X\Phi_1(X)\Phi_2(X)$.
 - (f) Montrer que $\sin 7\theta = -H(\sin \theta)$, $\cos 7\theta = H(\cos \theta)$, $\cosh 7\theta = H(\cosh \theta)$.
6. On définit une relation \mathcal{S} sur \mathbb{R} en posant : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{S} y \Leftrightarrow H(x) = H(y)$.
 - (a) Vérifier que \mathcal{S} est une relation d'équivalence.
 - (b) Décrire la classe d'équivalence de x , quand $|x| > 1$ puis quand $|x| \leq 1$
 - (c) On note Γ l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $H(x) = H(y)$.
Établir que Γ est la réunion d'une droite et de trois ellipses.
Construire Γ .