TD n°18 : encore une méthode de calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1. Pour tout k de $\mathbb{Z}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$

2. Montrer qu'il existe un couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall k \in \mathbb{Z}^*, \displaystyle\int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$

3. Avec ce couple (a,b), en déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 (at^2+bt)\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\Big)\,\mathrm{d}t$

4. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $\theta \in]0,\pi[$, exprimer $1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)$ comme un quotient de sinus.

5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

6. On considère la fonction réelle définie dans $[0,1]$ par : $f(t) = \dfrac{\pi^2(t^2-2t)}{4\sin(\pi t/2)}$ si $t \neq 0$.

   Montrer que f est prolongeable de façon $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

7. De ce qui précède, déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.