TD n°17 : une méthode de calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on x définit le polynôme $Q_n = \dfrac{1}{2i}((\mathrm{X}+i)^{n+1} - (\mathrm{X}-i)^{n+1})$.

1. (a) Déterminer le degré de Q_n, et son coefficient dominant.

   (b) Montrer que : $\forall\, r \in \mathbb{N},\ Q_{2r} = \displaystyle\sum_{p=0}^{r} (-1)^p \binom{2r+1}{2p+1} \mathrm{X}^{2r-2p}$.

2. (a) Déterminer les racines de Q_n. Montrer que ces racines sont simples et réelles.

   (b) En déduire que $Q_n = (n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(X - \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n+1}\Big)$.

   (c) Prouver que : $\forall\, r \in \mathbb{N},\ Q_{2r} = (2r+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\Big(\mathrm{X}^2 - \operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2r+1}\Big)$.

   (d) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2r+1} = \frac{r(2r-1)}{3}$, puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2r+1}} = \frac{2r(r+1)}{3}$.

3. (a) Montrer que : $\forall\, x \in \Big]0, \dfrac{\pi}{2}\Big[,\ \operatorname{cotan}^2 x < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

   (b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}$, puis la valeur de $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}$.