Le dernier chiffre non nul de $n!$

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $f(n)$ le dernier chiffre non nul dans l'écriture décimale d'un entier n.

Par exemple, $f(1357) = f(135700) = 7$.

L'objectif de l'exercice est de trouver une méthode de calcul de $f(n!)$.
Dans tout l'énoncé $a \equiv b$ signifie « a et b sont congrus modulo 10 »

1. Écrire une fonction Python calculant $f(n)$, avec $n \geqslant 1$.
   NB : cette première question n'est pas indispensable pour traiter la suite du problème.

2. Dans cette question, on obtient quelques résultats intermédiaires.
   (a) Soient n, n' dans $\mathbb{N}^*$, avec $f(n) \neq 5$ et $f(n') \neq 5$. Montrer que $\begin{cases} f(nn') \equiv f(n)f(n') \ [10] \\ f(nn') \neq 5 \end{cases}$

   (b) Pour tout $k \geqslant 0$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{2}\displaystyle\prod_{j=1}^{4}(5k+j)$.

   Écrire une fonction Python calculant μ_k puis montrer que μ_k est toujours congru à 12 modulo 500, et donc $f(\mu_k) = 2$ (faire intervenir la division euclidienne de k par 4).
   Indication pour Python : charger le package `sympy`.

3. On note $n = 5q_n + r_n$ la division euclidienne par 5 d'un entier n de $\mathbb{N}$.
   On note alors $u_n = \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{q_n-1}\mu_k\right)\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{r_n}(5q_n+j)\right)$ (un produit "vide" est considéré comme valant 1).

   (a) Montrer que $n! = 10^{q_n}\, q_n!\, u_n$. On en déduit bien sûr l'égalité $f(n!) = f(q_n!\, u_n)$.

   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\begin{cases} f(n!) \equiv f(q_n!)f(u_n) \\ f(n!) \neq 5 \end{cases}$

   Justifier également le fait que $f(u_n) \equiv u_n$.

   (c) Montrer que si $n \geqslant 5$ alors $u_{n+20} \equiv 6u_n \equiv u_n$ (on écrira $n + 20 = 5(q_n + 4) + r_n$).

   (d) Montrer que la suite des restes dans la division de u_k par 10, pour $5 \leqslant k \leqslant 24$, est :
   $2, 2, 4, 2, 8, 4, 4, 8, 4, 6, 8, 8, 6, 8, 2, 6, 6, 2, 6, 4$.
   Indication : on pourra traiter d'abord le cas où n est multiple de 5, et montrer comment les autres valeurs se calculent de proche en proche.

   (e) En utilisant ce qui précède, programmer une fonction calculant $f(n!)$ pour tout n (bien sûr sans utiliser la fonction factorielle, mais seulement des calculs de congruences, tous les calculs intermédiaires se faisant dans les limites de l'intervalle $[0, n]$).

Pour plus d'informations, on pourra jeter un oeil ou les deux sur : http://oeis.org/A008904