Problème

Dans ce problème, f désigne l'application définie sur $I =]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans I, on pose $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$.

On admettra que si une égalité de fonctions polynômes (de la variable x, et à coefficients réels ou complexes) est vraie sur un intervalle d'intérieur non vide (par exemple sur I) alors elle est vraie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et même sur $\mathbb{C}$ tout entier (cette dernière remarque ne sert que dans la question (8)).

1. Préciser $P_0(x)$, $P_1(x)$ et $P_2(x)$.
2. Prouver la relation
   $$\forall n \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + (1-x^2)P_n'(x) \qquad (E_1)$$
3. En déduire que P_n est un polynome dont on précisera le terme de degré maximum.
   Montrer par ailleurs que le polynôme P_n a la parité de n.
4. Pour tout x de I, on a $(1-x^2)f'(x) = xf(x)$.
   En déduire la relation suivante entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1} :
   $$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + n^2(1-x^2)P_{n-1}(x) \qquad (E_2).$$
5. (a) Prouver que : $\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n'(x) = n^2P_{n-1}(x) \qquad (E_3)$
   (b) En dérivant (E_1), montrer que les polynômes P_n satisfont à l'équation différentielle :
   $$\forall n \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (1-x^2)P_n''(x) + (2n-1)xP_n'(x) - n^2P_n(x) = 0 \qquad (E_4)$$
6. (a) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$ on a l'égalité $P_n^{(k)} = \left(\dfrac{n!}{(n-k)!}\right)^2 P_{n-k}$.
   (b) Prouver que $P_{2k}(0) = \left(\dfrac{(2k)!}{2^k k!}\right)^2$ pour tout k de $\mathbb{N}$ (utiliser (E_2))
7. Dans cette question, n est un entier fixé.
   (a) Justifier qu'on puisse écrire P_n sous la forme $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} a_k x^{n-2k}$.
   (b) Montrer alors que $a_k = \dfrac{1}{(n-2k)!}P_n^{(n-2k)}(0)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n/2$.
   (c) Déduire de ce qui précède (questions 6 et 7) une expression de a_k.
8. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout x de $\mathbb{R}$, on pose $Q_n(x) = i^nP_n(ix)$ et $g^{(n)}(x) = \dfrac{R_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$.
   (a) Montrer que Q_n est un polynôme de degré n et l'écrire sous une forme analogue à celle obtenue en $(7a)$ pour le polynôme P_n.
   (b) Préciser Q_0, Q_1, R_0 et R_1.
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $R_n = Q_n$ (Indication : reprendre la question (4)).
9. On note $\arcsin(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$ et $\operatorname{argsh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta_k x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$ les développements limités des applications arcsin et argsh $= \operatorname{sh}^{-1}$ à l'origine et à l'ordre $2n+2$.
   Calculer l'expression de α_k et de β_k en fonction de k.