TD n°12 : trois études de suites numériques

Exercice 1

Soit k un entier naturel fixé. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sqrt{(n+k)!}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\sqrt{j}\,)}$.

1. **Quelques valeurs numériques**
   (a) On choisit $k = 5$.
   Calculer u_n avec 5 chiffres significatifs, quand $1 \leq n \leq 10$, $n = 20$, $n = 50$.
   (b) Même question avec $k = 10$.
2. **Convergence de la suite** (u_n)
   (a) Dans le cas général, calculer le rapport $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$, pour tout $n \geq 2$.
   (b) En déduire que la suite u est monotone à partir d'un certain rang N à préciser.
   (c) Montrer que la suite u est convergente.
3. **Limite de la suite** (u_n)
   (a) Montrer $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq M \Rightarrow \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
   (b) Montrer que : $\forall\, x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ et que : $\forall\, x > 0$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   (c) En déduire que : $\forall\, n \geq M$, $\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) \leq \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$.
   (d) Conclure à $\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$. On veut calculer $\lim\limits_{+\infty} u_n$.

1. **Première méthode.**
   On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
   (a) Etablir : $\forall\, x \geq 0$, $0 \leq x - \ln(1+x) \leq \dfrac{x^2}{2}$.
   (b) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq 1 + \ln(v_n) - \ln(v_{n+1}) \leq \dfrac{1}{2n}$.
   (c) Montrer que : $\forall\, x \in [0,1[$, $x \leq -\ln(1-x)$.
   (d) En déduire : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
   (e) Prouver finalement que $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{n}\ln(v_n) = 1$, puis calculer $\lim\limits_{+\infty} u_n$.
2. **Deuxième méthode.**
   (a) Vérifier que : $\forall\, n \geq 1$, $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k) - \ln(n)$.
   (b) En encadrant $\ln(k)$ à l'aide d'intégrales, encadrer $\ln(u_n)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{n}\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

1. Calculer u_1 et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Prouver par récurrence que $u_n \leq \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$.
3. Montrer : $\exists\, L \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ tel que $\lim\limits_{+\infty} u_n = L$.
4. Montrer que : $\forall\, x > 0$, $\dfrac{1}{8(x+\dfrac{1}{2})} \leq (x+\dfrac{1}{2}) - \sqrt{x(x+1)} \leq \dfrac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$.
5. En déduire que : $\forall\, k \geq 1$, $\dfrac{u_k}{8(k+\frac{1}{2})} - \dfrac{u_k}{8(k+\frac{3}{2})} \leq u_{k+1} - u_k \leq \dfrac{u_k}{8k} - \dfrac{u_k}{8(k+1)}$.
6. Encadrer $u_p - u_n$ (pour $p > n$), puis établir : $\forall\, n \geq 1$, $\dfrac{u_n}{8(n+\frac{1}{2})} \leq L - u_n \leq \dfrac{L}{8n}$.
7. En déduire la majoration suivante : $\forall\, n \geq 1$, $\left|L - \left(1 + \dfrac{1}{8n}\right)u_n\right| \leq \dfrac{L}{16n^2}$.
8. Comment suffit-il de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près ?

   Même question avec $\left(1+\dfrac{1}{8n}\right)u_n$.

   NB : on peut montrer (mais on ne demande pas de le prouver) que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.