TD n°8 : Cauchy-Schwarz & Co

Exercice 1

Montrer que pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}^+$, on a : $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x} \leqslant \sqrt{6(x+y+z)}$.

Exercice 2

Montrer que pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}^{+*}$, on a : $x+y+z \leqslant 2\Big(\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{x+z}+\dfrac{z^2}{x+y}\Big)$.

Exercice 3

On se donne $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et on pose $G_n = \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{1/n}$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \ln^2(x_k) \geqslant n\ln^2(G_n)$.

Exercice 4

On se donne $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ dans $\mathbb{R}^{+}$. Donner le minimum de $\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ si on suppose $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Exercice 5

On se donne $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$

Exercice 6

Montrer que $\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{(n+1)2^n}$.

Exercice 7

On se donne $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ dans $]0,1[$.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1-x_k}{x_k} \geqslant n\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)$.
2. En déduire l'inégalité : $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{1-x_k} \geqslant \dfrac{n\sigma}{n-\sigma}$, où on a posé $\sigma = \sum_{k=1}^{n} x_k$.