TD n°2 : énoncé des exercices

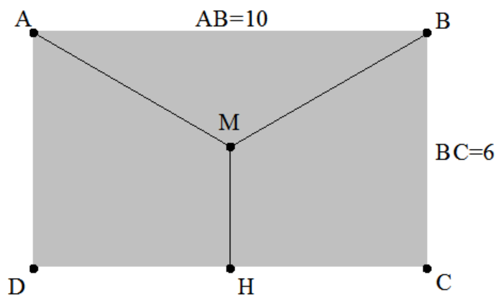
Exercice 1

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+6}\,\mathrm{e}^x$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Dresser le tableau de variations de f et tracer approximativement (mais pas grossièrement) sa représentation graphique sur $[-8, 2]$. On donne $\mathrm{e}^{-3} \approx 0.0498$ et $\mathrm{e}^{-4} \approx 0.0183$.

Exercice 2

$ABCD$ est un rectangle, avec $AB = 10$ et $BC = 6$.
H est le milieu du segment $[DC]$.
M est intérieur à ce rectangle, sur la médiatrice de $[DC]$.
On note θ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}})$.
Exprimer en fonction de θ la somme $MA + MB + MH$.
Préciser pour quelle valeur de θ cette somme est minimum et calculer la valeur de ce minimum.



Exercice 3

On considère deux suites (réelles ou complexes) $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$,
définies par la donnée de a_0 et b_0, et, pour tout entier naturel n, par les relations
$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$$
Montrer que ces deux suites convergent et calculer leur limite.
Indication : utiliser deux suites auxiliaires $(s_n)_{n \geqslant 0}$ et $(d_n)_{n \geqslant 0}$.

Exercice 4

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle et le point A a pour coordonnées $(a; b)$, avec $b \leqslant 0$.

1. Quand M décrit $\mathscr{C}$, montrer que la distance AM passe par un minimum absolu, pour un M_0 unique de $\mathscr{C}$.
2. Montrer que M_0 est l'unique M de $\mathscr{C}$ tel que (AM) soit orthogonale à la tangente à $\mathscr{C}$ en M.

Exercice 5

À chaque lancer d'une pièce équilibrée, on associe 1 si le résultat est "Pile", et -1 sinon.
Calculer la probabilité que la somme des résultats soit nulle après n lancers ($n \geqslant 1$).

Exercice 6

1. Notons $(v_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par $v_1 = 3$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{n} + 1$ pour tout $n \geqslant 1$.
   Il est clair que tous les v_n sont strictement positifs.
   (a) Soit n un entier, $n \geqslant 1$. Montrer que si $v_{n+1} < v_n$ alors $v_{n+2} < v_{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.
2. On définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ par $u_1 = a$ (avec a dans $\mathbb{C}$) et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + 1$ pour tout $n \geqslant 1$.
   Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1$

Exercice 7

Pour tout entier $n \geqslant 4$ on considère les deux nombres entiers $A(n) = 3n^2 - n + 1$ et $B(n) = 2n - 1$.
Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste dans la division enclidienne de $A(n)$ par $B(n)$.