

**Exercice 1**

On note  $C$  la classe,  $G$  l'ensemble des garçons de  $C$ , et  $F$  l'ensemble des filles de  $C$ .

On va former des propositions concernant l'âge et/ou les relations d'amitié entre éléments de  $C$ .

Pour dire qu'un élève  $x$  est plus jeune qu'un élève  $y$  (ou que  $y$  est plus vieux que  $x$ ), on notera  $x \leq y$ .

Pour ce qui est des relations d'amitié, et si on note  $x, y$  deux élèves de la classe (éventuellement le même) une phrase comme «  $x$  aime  $y$  » s'écrira  $x \heartsuit y$ . Et pour dire que  $x$  n'aime pas  $y$ , on écrira  $x \not\heartsuit y$ .

Dans les questions suivantes, on demande de traduire des phrases (librement exprimées en français) en de pures propositions logiques avec quantificateur.

Les phrases prononcées mettent en scène les élèves de MPSI3, et uniquement eux.

Toute ressemblance avec des situations réelles ne pourrait qu'être l'effet d'une coïncidence.

1. Traduire les phrases suivantes sous forme de proposition mathématique :

- (a) « *tout le monde aime tout le monde* » Réponse:  $\forall x \in C, \forall y \in C, x \heartsuit y$   
 (b) « *personne n'aime personne* » Réponse:  $\forall x \in C, \exists y \in C, x \heartsuit y$   
 (c) « *personne ne s'aime* » Réponse:  $\forall x \in C, x \not\heartsuit x$   
 (d) « *tout le monde aime quelqu'un* » Réponse:  $\forall x \in C, \exists y \in C, x \heartsuit y$

2. Traduire les phrases suivantes sous forme de proposition mathématique :

- (a) « *chaque fois que deux garçons aiment une même fille, ces deux garçons ne s'aiment pas* »  
 Réponse:  $\forall x \in G, \forall y \in G, \forall z \in F, ((x \heartsuit z \text{ et } y \heartsuit z)) \Rightarrow x \not\heartsuit y$   
 (b) « *l'amitié n'est pas toujours un sentiment réciproque* » Réponse:  $\exists x \in C, \exists y \in C, (x \heartsuit y \text{ et } y \not\heartsuit x)$   
 (c) « *il arrive qu'une amitié soit payée de retour* » Réponse:  $\exists x \in C, \exists y \in C, (x \heartsuit y \text{ et } y \heartsuit x)$   
 (d) « *les amis de mes amis sont mes amis* » Réponse:  
 $\forall x \in C, \forall y \in C, \forall z \in C, ((x \heartsuit y \text{ et } y \heartsuit z) \Rightarrow x \heartsuit z)$

3. Traduire les phrases suivantes sous forme de proposition mathématique :

- (a) « *le plus âgé des élèves est un garçon et il aime toutes les filles* »  
 Réponse:  $\exists x \in G, (\forall y \in C, y \leq x) \text{ et } (\forall z \in F, x \heartsuit z)$   
 (b) « *le plus âgé des garçons aime la plus jeune des filles* »  
 Réponse:  $\forall x \in G, \forall y \in F, ((\forall x' \in G, x' \leq x) \text{ et } (\forall y' \in F, y \leq y')) \Rightarrow x \heartsuit y$

**Exercice 2**

On définit trois propositions  $A, B, C$ . On note  $\neg P$  la négation d'une proposition  $P$ .

On note  $P \wedge Q$  la proposition «  $P$  et  $Q$  ». On note  $P \vee Q$  la proposition «  $P$  ou  $Q$  ».

On note  $V$  la proposition « toujours vraie » et  $F$  la proposition « toujours fausse ».

1. Simplifier les propositions suivantes :

(a)  $A \vee V$  (b)  $A \wedge F$  (c)  $A \vee \neg A$  (d)  $\neg(\neg A \vee V)$

2. Simplifier les propositions suivantes :

(a)  $A \Rightarrow V$  (b)  $A \Rightarrow F$  (c)  $F \Rightarrow A$  (d)  $V \Rightarrow \neg A$

3. Simplifier les propositions suivantes :

(a)  $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)$  (b)  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A)$  (c)  $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$

4. Simplifier les propositions suivantes :

(a)  $A \vee (A \Rightarrow B)$  (b)  $A \wedge (A \Rightarrow B)$  (c)  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$  (d)  $A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$  (e)  $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

5. Simplifier la proposition suivante :  $(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A) \wedge A$