Trois relations identiques dans $\mathcal{P}(E)$

Etant donné un ensemble E, on désigne par $\mathcal{M}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ telle que :

$$\forall\, X, Y \in \mathcal{M},\ \exists\, Z \in \mathcal{M},\ \text{ tel que }\ Z \subset X \cap Y.$$

1. Montrer que pour tout ensemble E, il existe de telles parties $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(E)$.
2. On associe à $\mathcal{M}$ une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathcal{M} \text{ telque } A \cap X = B \cap X$$

   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   (b) Montrer que $\mathcal{R}$ est l'égalité si et seulement si $\mathcal{M} = \{E\}$.

   (c) Montrer que $\mathcal{R}$ est l'équivalence universelle si et seulement si $\emptyset \in \mathcal{M}$.

3. On note $\widehat{A}$ la classe d'équivalence, pour $\mathcal{R}$, d'une partie A quelconque de E.

   (a) Déterminer $\widehat{E}$ et $\widehat{\emptyset}$.

   (b) Montrer que si $A \in \widehat{E}$ et $B \in \widehat{E}$, alors $A \cap B \in \widehat{E}$.

   (c) On pose $\mathcal{N} = \widehat{E}$, et dans $\mathcal{P}(E)$ on désigne par $\mathcal{S}$ la relation :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\,\mathcal{S}\,B \Leftrightarrow \exists\, Y \in \mathcal{N} \text{ telque } A \cap Y = B \cap Y$$

   Montrer que les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont identiques.

4. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la différence symétrique :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

   Soit $\mathcal{T}$ la relation définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\,\mathcal{T}\,B \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathcal{M} \text{ telque } (A\Delta B) \cap X = \emptyset$$

   (a) Montrer que les relations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ sont identiques.

   (b) A, A', B, B' étant des parties de E telles que $A\,\mathcal{R}\,A'$ et $B\,\mathcal{R}\,B'$, montrer que : $(A \cap B)\,\mathcal{R}\,(A' \cap B')$, $\quad (A \cup B)\,\mathcal{R}\,(A' \cup B')$, $\quad \bar{A}\,\mathcal{R}\,\overline{A'}$, $\quad$ et $(A\Delta B)\,\mathcal{R}\,(A'\Delta B')$.

5. Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{P}(E)$ pour la relation $\mathcal{R}$ dans les cas suivants :

   (a) $\mathcal{M} = \{E\}$.

   (b) $\emptyset \in \mathcal{M}$.

   (c) $\mathcal{M} = \{\{x\}\}$, où $x \in E$.

   (d) $\mathcal{M} \supset \{\{x\}, \{y\}\}$, où x, y sont deux éléments distincts de E.