Le postulat de Bertrand

Notations

– On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}_n = \mathbb{P} \cap [2, n]$ et $\pi(n) = \text{card}(\mathbb{P}_n)$.
$\pi(n)$ désigne donc le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n.

– Pour tout entier $n \geqslant 2$, et tout p de $\mathbb{P}$, on note $v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N},\ p^k \mid n\}$.
$v_p(n)$ est donc l'exposant de p dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers.
On dit que $v_p(n)$ est la *valuation* de n suivant p.
L'égalité $v_p(n) = k$ caractérise donc les entiers n divisibles par p^k mais pas par p^{k+1}.

– Pour tout $n \geqslant 2$, on note $E_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et $n\mathbb{N} = \{kn,\ k \in \mathbb{N}\}$.

– On note $[x]$ la partie entière de tout réel x.

L'objet de ce problème est de montrer le “postulat de Bertrand” :

Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe au moins un entier premier p tel que $n < p < 2n$.

Dans la suite du problème, n est un entier fixé quelconque, supérieur ou égal à 2.

Première partie

Dans cette partie et dans la suivante, p désigne un entier premier fixé quelconque.
On note m l'entier k maximum tel que $p^k \leqslant n$.

1. Donner une expression de m sous la forme d'une partie entière.
2. Pour $1 \leqslant k \leqslant m$, calculer $\text{card}(E_n \cap p^k\mathbb{N})$ et $\text{card}\{j \in E_n,\ v_p(j) = k\}$.
3. Justifier l'égalité $v_p(n!) = \sum_{j=2}^{n} v_p(j)$.
4. En déduire finalement l'égalité $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{m} \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie les valeurs possibles de la quantité $u_p(n) = v_p\left(\dbinom{2n}{n}\right)$.

1. Montrer que $u_p(n) = \sum_{k=1}^{m'} \left(\left[\dfrac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\dfrac{n}{p^k}\right]\right)$, avec $m' = \left[\dfrac{\ln(2n)}{\ln p}\right]$.
2. Vérifier les propriétés suivantes :
   (a) $p^{u_p(n)} \leq 2n$.
   (b) Si $\sqrt{2n} < p$, alors $u_p(n) \in \{0, 1\}$.
   (c) Si $n \geqslant 3$ et $\frac{2}{3}n < p \leq n$, alors $u_p(n) = 0$.
   (d) Si $n < p < 2n$, alors $u_p(n) = 1$.

Troisième partie

Cette partie est consacrée à la démonstration de résultats utiles dans la partie IV.

Pour tout réel $x \geqslant 2$, on note Π_x le produit des entiers premiers $p \leqslant x$.

1. Montrer que si $0 \leqslant k \leqslant 2n$ alors $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$. En déduire $\binom{2n}{n} \geqslant \dfrac{4^n}{2n}$.
2. (a) Pour tout $m \geqslant 1$, montrer que $\Pi_{2m+1} \leqslant \binom{2m+1}{m}\Pi_{m+1} \leqslant 4^m \Pi_{m+1}$.
   Indication : montrer que tout p de $\mathbb{P}$ tel que $m+1 < p \leqslant 2m+1$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

   (b) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 2$, on a $\Pi_x \leq 4^x$ (inégalité de Tchebyshev).
3. Montrer que tous les diviseurs premiers de $\binom{2n}{n}$ sont strictement inférieurs à $2n$.

Quatrième partie

Dans cette partie, on va prouver le postulat de Bertrand. On suppose, par l'absurde, l'existence d'un entier $n \geqslant 2$ tel que l'intervalle $]n, 2n[$ ne contienne aucun entier premier.

1. Montrer que l'entier n est nécessairement supérieur ou égal à 631.
   Indication : considérer les entiers premiers $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 13$, $p_5 = 23$, $p_6 = 43$, $p_7 = 83$, $p_8 = 163$, $p_9 = 317$, et $p_{10} = 631$.
2. Montrer que l'hypothèse faite sur n permet d'écrire $\binom{2n}{n} = \prod\limits_{p \in \mathbb{P}_n} p^{u_p(n)}$.
3. Utiliser les parties II et III pour établir $\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}-1}\, 4^{2n/3}$.

   Indication : $p \in \mathbb{P}_n \Rightarrow (p \leqslant \sqrt{2n})$ ou $(\sqrt{2n} < p \leqslant \dfrac{2n}{3})$ ou $(\dfrac{2n}{3} < p \leqslant n)$.
4. En déduire que $4^{n/3} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}}$, puis $\varphi(\sqrt{2n}) \geqslant \dfrac{\ln 2}{6}$ avec $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
5. Déduire que ce qui précède que n est inférieur à 450 et conclure.

Contexte historique

Le “postulat de Bertrand” fut pour la première fois conjecturé en 1845 par Joseph Bertrand (1822-1900) qui le vérifia lui-même pour tous les nombres de l'intervalle $[2, 3 \cdot 10^6]$.

La première démonstration date de 1850 et est dûe à Chebyshev (1821-1894). Ainsi le postulat est-il aussi appelé théorème de Chebyshev.

Ramanujan (1887-1920) en donna une démonstration plus simple et Paul Erdös (1913-1996) publia en 1932 une preuve élémentaire utilisant les coefficients binomiaux (c'est de cette preuve qu'est inspirée le problème ci-dessus).