Plus loin dans l'irrationnel

Il n'est pas très difficile de montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ est irrationnel.

On se propose ici de généraliser considérablement ce genre de résultat.

Pour cela, il est important de se munir de notations commodes.

— On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

— Pour toute partie finie A de $\mathbb{P}$, on note Π_A la racine carrée du produit des éléments p de A.
Par exemple, si $A=\{2,5,17\}$, alors $\Pi_A=\sqrt{2\cdot 5\cdot 17}=\sqrt{170}$. Par convention $\Pi_\emptyset=1$.
Il est clair que si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{P}$, alors $\Pi_A\Pi_B=\Pi_{A\cup B}$.

— Pour toute partie E de $\mathbb{P}$, le symbole $\sum_A^E$ désigne une somme indicée sur une partie quelconque A de E.
Par exemple, si $E=\{2,5,17\}$, $S=\sum_A^E\lambda_A\Pi_A$ est une somme de 2^3 termes, A parcourant $\mathcal{P}(E)$.
Cette somme pourrait s'écrire, en notant par exemple $\lambda_{a,b,\ldots}$ plutôt que $\lambda_{\{a,b,\ldots\}}$:

$$\begin{aligned} S &= \lambda_\emptyset\,\Pi_\emptyset+\lambda_2\,\Pi_2+\lambda_5\,\Pi_5+\lambda_{17}\,\Pi_{17}+\lambda_{2,5}\,\Pi_{2,5}+\lambda_{2,17}\,\Pi_{2,17}+\lambda_{5,17}\,\Pi_{5,17}+\lambda_{2,5,17}\,\Pi_{2,5,17}\\ &= \lambda_\emptyset+\lambda_2\sqrt{2}+\lambda_5\sqrt{5}+\lambda_{17}\sqrt{17}+\lambda_{2,5}\sqrt{10}+\lambda_{2,17}\sqrt{34}+\lambda_{5,17}\sqrt{85}+\lambda_{2,5,17}\sqrt{170}\end{aligned}$$

Bien sûr, rien n'empêche d'écrire $S=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{17}+e\sqrt{10}+f\sqrt{34}+g\sqrt{85}+h\sqrt{170}$

— Pour toute partie E de $\mathbb{P}$, on note $\mathbb{K}_E=\{\sum_A^E\lambda_A\Pi_A,\ \lambda_A\in\mathbb{Q}\}$.
$\mathbb{K}_E$ est donc l'ensemble des combinaisons à coefficients rationnels des Π_A, pour tous les $A\subset E$.
Cette définition donne immédiatement $\mathbb{K}_\emptyset=\mathbb{Q}$. Voici quelques exemples :
  - ◇ $\mathbb{K}_{\{2\}}=\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$
  - ◇ $\mathbb{K}_{\{2,5\}}=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{10},\ (a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4\}$
  - ◇ $\mathbb{K}_{\{2,5,17\}}=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{17}+e\sqrt{10}+f\sqrt{34}+g\sqrt{85}+h\sqrt{170},\ (a,b,\ldots,g,h)\in\mathbb{Q}^8\}$

— Il est clair que si $E\subset F\subset\mathbb{P}$, alors $\mathbb{K}_E\subset\mathbb{K}_F$. On verra plus loin que $E\subsetneq F\Rightarrow\mathbb{K}_E\subsetneq\mathbb{K}_F$.

— Juste une petite remarque, en prenant par exemple $E=\{2,5,17\}$:
Soit $S=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{17}+e\sqrt{10}+f\sqrt{34}+g\sqrt{85}+h\sqrt{170}$ dans $\mathbb{K}_E$, avec $(a,b\ldots,g,h)$ dans $\mathbb{Q}^8$.
Alors on peut écrire : $S=x+y\sqrt{17}$, avec $\begin{cases}x=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+e\sqrt{10}\\ y=d+f\sqrt{2}+g\sqrt{5}+h\sqrt{10}\end{cases}$ donc $(x,y)\in\mathbb{K}^2_{\{2,5\}}$.

Dans tous le problème, E désigne une partie de $\mathbb{P}$.

1. On suppose que E est non vide. Montrer que Π_E est un irrationnel.
2. Prouver que $\mathbb{K}_E$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
3. On va montrer, par récurrence sur $n=\text{card}(E)$, que $\mathbb{K}_E$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
   La propriété est vraie si $n=0$, car alors $E=\emptyset$ et on sait que $\mathbb{K}_\emptyset=\mathbb{Q}$.
   On se donne donc un entier $n\geqslant 1$, et on suppose que la propriété est vraie au rang $n-1$.
   On suppose que $\text{card}(E)=n$. On note q un élément de E, et $G=E\setminus\{q\}$.
   On se donne un élément z non nul de $\mathbb{K}_E$. Il s'agit de montrer que $1/z$ est dans $\mathbb{K}_E$.
   Bien sûr, si z est dans $\mathbb{K}_G$, l'hypothèse de récurrence montre que $1/z$ est dans $\mathbb{K}_G$ donc dans $\mathbb{K}_E$.
   On suppose donc que z est dans $\mathbb{K}_E$ mais pas dans $\mathbb{K}_G$.
   (a) Montrer qu'il existe x et y dans $\mathbb{K}_G$ tels que $z=x+y\sqrt{q}$, avec $x-y\sqrt{q}\neq 0$.
   (b) On note $\overline{z}=x-y\sqrt{q}$ et $\omega=z\overline{z}=x^2-qy^2$. Montrer que ω est un élément non nul de $\mathbb{K}_G$.
   En déduire que $1/z$ est dans $\mathbb{K}_E$ et conclure.
4. On note $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

(a) Montrer que $\mathbb{K}_E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$.
Préciser un majorant de la dimension de $\mathbb{K}_E$, en fonction de $n = \text{card}(E)$.

(b) Dans cette question, on va redémontrer que $\mathbb{K}_E$ est un corps.
Soit x un élément non nul de $\mathbb{K}_E$. Pour tout y de $\mathbb{K}_E$, on pose $\varphi(y) = xy$.
Montrer que φ est un automorphisme du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_E$.
En déduire que l'inverse dans $\mathbb{R}$ du réel x est encore un élément de $\mathbb{K}_E$. Conclure.

5. On va prouver, par récurrence sur $n \geqslant 0$, la propriété $\mathcal{H}_n$ cidessous :
$\mathcal{H}_n$: « Soit $E \subset \mathbb{P}$, avec $\text{card}(E) = n$. Soit $F \in \mathbb{P}$, avec $F \not\subset E$. Alors Π_F n'est pas dans $\mathbb{K}_E$ »

(a) Vérifier que la propriété est vraie si $n = 0$.

Dans la suite de cette question, on fixe $n \geqslant 1$, et on suppose que $\mathcal{H}_{n-1}$ est vraie.
Par l'absurde, on suppose que $\mathcal{H}_n$ est fausse. Il existe donc une partie E de $\mathbb{P}$ de cardinal n, et une partie F de $\mathbb{P}$ non incluse dans E, telles que Π_F soit élément de $\mathbb{K}_E$.
On se donne un élément q de E, et on note $G = E \setminus \{q\}$.

(b) Montrer qu'il existe x et y dans $\mathbb{K}_G$, avec $y \neq 0$, tels que $\Pi_F = x + y\sqrt{q}$.

(c) Après élévation au carré, montrer que $x = 0$ donc $\Pi_F = y\sqrt{q}$, avec y dans $\mathbb{K}_G$.

(d) En discutant suivant la présence de q dans F, aboutir à une contradiction et conclure.

6. Soit E une partie de $\mathbb{P}$, de cardinal n.
Montrer que $\mathbb{K}_E$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2^n, et en donner une base.

7. On se donne des parties non vides $A_1, A_2, \ldots, A_m$ de $\mathbb{P}$, distinctes deux à deux, avec $m \geqslant 1$.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des rationnels *non tous nuls*. Pour $1 \leqslant k \leqslant m$, on note : $q_k = \prod\limits_{p \in A_k} p$.
Montrer que le réel $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \sqrt{q_k}$ est un irrationnel.

Exemple : si $\begin{cases} A_1 = \{2\}, A_2 = \{5\}, A_3 = \{7\}, \\ A_4 = \{2, 5\},\ A_5 = \{3, 5\} \end{cases}$ alors $\begin{cases} q_1 = 2, q_2 = 5, q_3 = 7 \\ q_4 = 10,\ q_5 = 15 \end{cases}$

Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_5) \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, $x = \lambda_1\sqrt{2} + \lambda_2\sqrt{5} + \lambda_3\sqrt{7} + \lambda_4\sqrt{10} + \lambda_5\sqrt{15}$ est irrationnel.

8. Montrer que $u_n = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$ n'est jamais un rationnel.