Nombres de Stirling de seconde espèce

Soit $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ un ensemble de p parties d'un ensemble E.

On dit que $\mathcal{P}$ est une partition de E en p classes si :
- Aucune des parties A_k n'est vide.
- Les parties A_k sont disjointes deux à deux.
- La réunion des parties A_k est égale à l'ensemble E.

On note $\left\{ {n \atop p} \right\}$ le nombre de partitions en p classes d'un ensemble à n éléments.

Les coefficients $\left\{ {n \atop p} \right\}$ sont appelés *nombres de Stirling*[1] *de seconde espèce.*

Comme *modèle* d'ensemble à n éléments, on pourra prendre $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Par exemple $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$ car les seules partitions de $E_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ en *deux* classes sont :

$$\{\{1,2,3\},\{4\}\} \quad \{\{1,2,4\},\{3\}\} \quad \{\{1,3,4\},\{2\}\} \quad \{\{2,3,4\},\{1\}\}$$
$$\{\{1,2\},\{3,4\}\} \quad \{\{1,3\},\{2,4\}\} \quad \{\{1,4\},\{2,3\}\}$$

On notera que l'ordre dans lequel les "classes" apparaissent dans une partition donnée est sans importance. Par exemple, et pour reprendre l'exemple ci-dessus, la partition $\{A_1, A_2\}$ définie par $A_1 = \{1, 2, 3\}$ et $A_2 = \{4\}$ est la même que celle définie par $A_1 = \{4\}$ et $A_2 = \{1, 2, 3\}$.

Par convention, on pose $\left\{ {0 \atop p} \right\} = 1$ pour tout p de $\mathbb{N}$ et $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

I. Premières propriétés

1. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, préciser les valeurs de $\left\{ {n \atop 1} \right\}$ et $\left\{ {n \atop n} \right\}$, et de $\left\{ {n \atop p} \right\}$ si $p > n$.

   (b) Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$ et que $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$.

2. (a) On suppose $1 \leqslant p < n$. Montrer que $\left\{ {n \atop p} \right\} = \left\{ {n-1 \atop p-1} \right\} + p \left\{ {n-1 \atop p} \right\}$.

   Indication : considérer une partition quelconque de E_n en p classes et discuter suivant que le singleton $\{n\}$ est ou n'est pas l'une des classes de cette partition.

   (b) Déduire de ce qui précède l'existence d'un *triangle de Stirling*, analogue du triangle de Pascal, que l'on complètera pour y faire figurer les $\left\{ {n \atop p} \right\}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n \leqslant 7$.

3. Pour tout réel x et tout entier naturel n, on pose $x^{\underline{0}} = 1$ et $x^{\underline{n+1}} = (x - n)x^{\underline{n}}$.

   Ainsi $x^{\underline{1}} = x$, $x^{\underline{2}} = x(x-1)$, $x^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2)$, etc.

   Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, prouver l'égalité $x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$.

4. Prouver l'égalité $\left\{ {n+1 \atop p+1} \right\} = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop p} \right\}$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

   Indication : étant donné une partition $\mathcal{P}$ de E_{n+1} en $p+1$ classes, raisonner selon le nombre d'éléments qui ne sont pas dans la classe de l'élément $n+1$.

1. James Stirling : born 1692 in Garden, Scotland ; died 5 Dec 1770 in Edinburgh, Scotland.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Stirling.html

II. Nombres de Stirling et surjections

Pour tous entiers strictement positifs n et p, on note $S_{n,p}$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.

1. (a) Préciser les valeurs de $S_{n,p}$ si $p > n$, de $S_{n,n}$, $S_{n,1}$, et $S_{n,2}$.

   (b) Montrer que si $1 \leqslant p \leqslant n$, alors $S_{n,p} = p\,!\left\{ {n \atop p} \right\}$. Indication : à toute surjection $f : E_n \to E_p$, associer une partition de E_n.

   (c) En déduire une relation sur les $S_{n,p}$ analogue à celle vue en (I.3)

2. On suppose désormais $1 \leqslant p \leq n$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k} = 0$.

   (b) Montrer que $0 \leq k \leq q \leq p \Rightarrow \displaystyle\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$.

   (c) En déduire que, si $0 \leq k < p$, alors $\displaystyle\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = 0$ (et si $k = p$?).

3. (a) Montrer que pour tout entier q de $\{1, 2, \ldots, p\}$ le nombre d'applications de E_n dans E_p ayant un ensemble image à q éléments est égal à $\displaystyle\binom{p}{q}S_{n,q}$.

   (b) En déduire que $p^n = \displaystyle\sum_{q=1}^{p}\binom{p}{q}S_{n,q}$.

   (c) Retrouver l'égalité précédente en utilisant la question (I.3).

   (d) En utilisant ce qui précède, montrer que : $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$.

   Indication : transformer le second membre à l'aide de la question précédente et justifier soigneusement l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=1}^{k}\cdots = \sum_{q=1}^{p}\sum_{k=q}^{p}\cdots$

   (e) En déduire finalement l'égalité $\left\{ {n \atop p} \right\} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{p-k}k^n}{k\,!\,(p-k)!}$.