Groupes ordonnés

Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement.

Le neutre de G est noté e. Le symétrique d'un élément x de G est noté x^{-1}.

Pour toute partie P de G, et pour tout élément a de G, on note :

$$PP = \{hk,\ h \in P,\ k \in P\}; \quad P^{-1} = \{h^{-1},\ h \in P\}; \quad a^{-1}Pa = \{a^{-1}ha,\ h \in P\}$$

Le groupe G est dit ordonné s'il est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie :

$$\forall\, a, b, c \in G, \quad a \leq b \Rightarrow (ac \leq bc \text{ et } ca \leq cb)$$

On notera bien qu'a priori, la relation $\leq$ est une relation d'ordre *partielle*.
Autrement dit, l'hypothèse précédente peut se lire : “si a et b sont comparables, alors ac et bc sont comparables et dans le même ordre que a et b (idem avec ca et cb)”.

1. On suppose que G est ordonné. Soit $P = \{h \in G,\ e \leq h\}$. Montrer successivement :
   (a) $P \cap P^{-1} = \{e\}$
   (b) $PP \subset P$
   (c) $\forall\, a \in G,\ a^{-1}Pa \subset P$.
   (d) Si l'ordre défini par $\leq$ est total, $P \cup P^{-1} = G$.
2. Réciproquement, soit G un groupe contenant une partie P vérifiant (a), (b) et (c).
   On définit une relation $\mathcal{R}$ sur G par : $\forall\, a, b \in G,\ a\, \mathcal{R}\, b \Leftrightarrow ba^{-1} \in P$
   (a) Montrer que muni de cette relation, G est un groupe ordonné.
   (b) Montrer que si $P \cup P^{-1} = G$, alors l'ordre ainsi défini est total.
3. Soit G un groupe ordonné commutatif.
   On suppose que, pour tout (a, b) de G^2, $\sup\{a, b\}$ existe dans G.
   Attention : $\sup\{a, b\}$ désigne “l'élément minimum de l'ensemble des majorants de a et b”.
   Cela signifie donc qu'étant donnés deux éléments a et b de G, il existe des éléments h de G tels que $a \leqslant h$ et $b \leqslant h$, et que parmi ceux-là, il en existe un qui soit plus petit (au sens de la relation $\leqslant$) que tous les autres. Montrer successivement que :
   (a) $\forall\, a, b, c \in G, \quad c \cdot \sup\{a, b\} = \sup\{ac, bc\}$.
   (b) $\forall\, a, b \in G, \quad \inf\{a, b\}$ existe (on prouvera que $\inf\{a, b\} = (\sup\{a^{-1}, b^{-1}\})^{-1}$).
   (c) $\forall\, a, b, c \in G, \quad c \cdot \inf\{a, b\} = \inf\{ac, bc\}$.
   (d) $\forall\, a, b \in G, \quad \inf\{a, b\} \cdot \sup\{a, b\} = ab$.