Filtres et ultrafiltres

Soit E un ensemble non vide.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ est un *filtre* sur E si

— (P_0) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
— (P_1) $\forall (X,Y) \in \mathcal{F}^2,\ X \cap Y \in \mathcal{F}$.
— (P_2) $\forall X \in \mathcal{F},\ \forall Y \in \mathcal{P}(E) :\quad X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.
— (P_3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Première Partie

1. Que dire d'une famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifierait (P_2) mais pas (P_3) ?
2. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre sur E ?
   A quelle condition sur E, l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur E alors E appartient à $\mathcal{F}$.
4. Pour toute partie non vide A de E, on note $\mathcal{F}_A = \{X \subset E, A \subset X\}$.
   Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un filtre sur E. On l'appelle le *filtre principal* engendré par A.
5. On désigne par $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des filtres sur E.
   Montrer que l'application φ de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ dans $\mathcal{F}(E)$ définie par $\varphi(A) = \mathcal{F}_A$ est injective.
6. Dans cette question, on suppose que E est un ensemble infini.
   On note $\mathcal{I}_E$ l'ensemble des complémentaires des parties finies de E.
   Montrer que $\mathcal{I}_E$ est un filtre sur E.

Deuxième Partie

1. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. On suppose que l'un des éléments de $\mathcal{F}$ est une partie *finie* de E.
   L'objectif de cette question est de démontrer que le filtre $\mathcal{F}$ est principal.
   Par hypothèse l'ensemble $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N}, \exists\, B \in \mathcal{F}, \operatorname{card}(B) = n\}$ est donc non vide.
   Soit n_0 le minimum de l'ensemble $\mathcal{N}$, et soit A un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal n_0.
   Montrer que $\mathcal{F}$ est le filtre principal engendré par A.
2. (a) En déduire que si E est un ensemble fini, tout filtre sur E est principal.
   (b) Qu'en déduit-on, si E est fini, pour l'application φ définie en I-5 ?
   (c) Quel est le nombre de filtres sur un ensemble à n éléments (avec $n \geqslant 1$) ?
   Donner quelques exemples de filtres sur l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$.
3. Soit E un ensemble infini. Prouver que $\mathcal{I}_E$ n'est pas un filtre principal.

Troisième Partie

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ en posant :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{F},\ X \cap B = Y \cap B$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Soit A une partie non vide de E. On suppose que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$.
   Montrer qu'alors : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$.
3. On suppose que E est infini et que $\mathcal{F}$ est le filtre $\mathcal{I}_E$.
   Δ désigne l'opération différence symétrique sur $\mathcal{P}(E)$.
   Montrer que : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X\Delta Y$ est un ensemble fini.

Quatrième Partie

On munit l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ de la relation d'ordre "inclusion".

Autrement dit, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux filtres sur E, on pose $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

NB : on pourra indifféremment utiliser le symbole $\leqslant$ ou le symbole $\subset$.

On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ de E est un *ultrafiltre* si : $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{F}(E),\ \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}$.

1. Vérifier que pour toutes parties A, B non vides de E : $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$.
2. (a) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un élément minimum ? Si oui lequel ?
   (b) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un élément maximum ? Si oui lequel ?
3. (a) Soit $\mathcal{F}_A$ le filtre engendré par une partie A non vide de E.
   Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre si et seulement si A est un singleton $\{x\}$.
   On dit que les $\mathcal{F}_{\{x\}}$ sont les ultrafiltres *triviaux*.
   (b) Quels sont les ultrafiltres sur E si l'ensemble E est fini ?
4. On rappelle que pour toute partie A de E, $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.
   Montrer qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur E est un ultrafiltre si et seulement si :
   $$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ (A \in \mathcal{F} \text{ ou } \overline{A} \in \mathcal{F})$$
5. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si :
   $$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \text{ ou } B \in \mathcal{F})$$
6. (a) Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est pas un ultrafiltre.
   (b) Montrer que $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ n'est inclus dans aucun ultrafiltre trivial.