Autour de la suite de Fibonacci

On définit la *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\geqslant 0}$ par : $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$ et $\forall\, n \geqslant 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On a donc $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, etc.

On définit ainsi une suite d'entiers naturels, strictement croissante à partir du rang 2.

Leonardo Pisano, dit Fibonacci (1170-1250) : par son oeuvre principale, le « liber abaci », il a introduit et popularisé la numérotation positionnelle utilisant les chiffres arabes. Les entiers F_n y apparaissent dans un problème relatif à la descendance d'un couple de lapins. C'est le mathématicien français Edouard Lucas (1842-1891) qui baptisa cette suite et en découvrit d'intéressantes propriétés.

Première partie

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de divisibilité portant sur les entiers F_n.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, prouver la relation de Cassini : $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
   En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les entiers F_{n-1} et F_n sont premiers entre eux.
   Jean-Baptiste Cassini (1625-1712), astronome à qui on doit la découverte des satellites de Jupiter.

2. Pouvez-vous expliquer le paradoxe suivant, attribué à Lewis Carrol ?

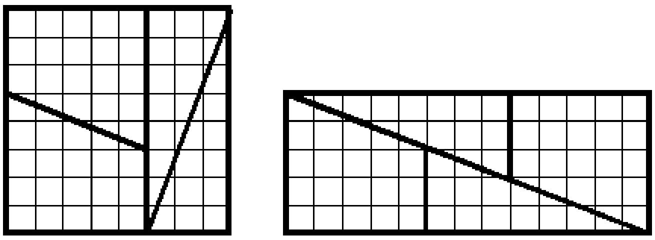
   On découpe un carré 8×8 comme indiqué en deux triangles et deux trapèzes.

   On réarrange les quatre morceaux en un seul rectangle de taille 5×13.

   Avant découpe, l'aire totale vaut 64.

   Après réarrangement elle vaut 65.

   D'où vient le carré supplémentaire ?

   Généraliser très soigneusement en utilisant les entiers F_n.
   Lewis Carrol, 1832-1898, logicien et écrivain britannique. Auteur de « Alice au Pays des Merveilles ».

3. Montrer que pour tout (n, m) de $\mathbb{N}^2$, on a $F_{n+m+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$.

4. En déduire que pour tout (q, n) de $\mathbb{N}^2$, F_{qn} est un multiple de F_n.

5. On se donne (m, n) dans $\mathbb{N}^2$, avec $m \leqslant n$. Soit d un entier naturel.

   Montrer que si d divise F_n et F_m, alors il divise F_{n-m} (utiliser les questions 1 et 3.)

6. En déduire que pour tous entiers m et n on a : $F_m \wedge F_n = F_{m\wedge n}$.

   Indication : on sera amené à démontrer que si p divise F_m et F_n, alors il divise $F_{m\wedge n}$.

   Pour cela, on raisonnera par récurrence sur la valeur de $m + n$, et on utilisera la question 5.

7. Montrer qu'on peut maintenant compléter le résultat de la question 4 de la façon suivante :

   Pour tout entier $n \geqslant 3$, et pour tout entier m, on a l'équivalence : $F_n \mid F_m \Leftrightarrow n \mid m$.

8. Dans cette question on va prouver le lemme de Yuri Matijasevitch (1970) :

   « Pour $n \geqslant 3$ et $m \geqslant 0$: F_m est divisible par F_n^2 si et seulement si m est divisible par nF_n »

   (a) Par récurrence sur k, montrer les congruences $\begin{cases} F_{kn} \equiv kF_nF_{n+1}^{k-1} \quad (F_n^2) \\ F_{kn+1} \equiv F_{n+1}^k \quad (F_n^2) \end{cases}$

   (b) Conclure

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie des problèmes relatifs à des sommes d'entiers F_n.

1. Montrer que pour tout entier n, on a l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
2. Montrer $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$, pour tout $n \geqslant 0$.
3. On note Φ la solution positive de $x^2 = x + 1$. Donc $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le *nombre d'or*).
   On note $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} F_k x^k$ pour tout réel x et tout entier n.
   (a) Montrer que pour tout entier n, on a l'encadrement $0 \leqslant F_n \leqslant \Phi^n$.
   (b) En déduire que la suite $n \mapsto S_n(x)$ est convergente pour tout x de $I =]-1/\Phi, 1/\Phi[$.
   (c) Pour $x \in I$, on note $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} F_k x^k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$. Prouver : $S(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$
   (d) Calculer $y = 0.1 + 0.01 + 0.002 + 0.0003 + 0.00005 + 0.000008 + 0.0000013 + 0.00000021 + \cdots$
4. On va établir que tout entier s'écrit de façon unique comme somme d'entiers F_n non consécutifs (C'est le *Théorème de Zeckendorf* (1972).) On notera $n \gg m$ pour exprimer que $n \geqslant m+2$.
   (a) Montrer que $F_n + F_{n-2} + F_{n-4} + \cdots = F_{n+1} - \varepsilon$, où $\varepsilon = 1$ si n est pair, et $\varepsilon = 0$ sinon.
   (b) Soit n un entier naturel strictement positif.
   On suppose qu'il existe $k_0 \gg k_1 \gg \cdots \gg k_p \gg 0$ ($p \geqslant 0$) tels que $n = F_{k_0} + F_{k_1} + \cdots + F_{k_p}$.
   Montrer que k_0 est nécessairement l'entier k maximum tel que $F_k \leqslant n$.
   (c) Soit n un entier naturel strictement positif. Montrer qu'il existe une unique décomposition de n sous la forme $n = F_{k_0} + F_{k_1} + \cdots + F_{k_p}$, avec $p \geqslant 0$ et $k_0 \gg k_1 \gg \cdots \gg k_p \gg 0$.
   (d) Former la décomposition de $n = 2002$.
5. Dans cette question, on cherchera le rapport avec les nombres de Fibonacci.
   (a) De combien de façons différentes peut-on daller une allée $2 \times n$ avec des dalles 2×1 ?
   (b) Épatez vos amis, brillez en société ! Vous distribuez dans l'assistance 8 cartes numérotées contenant chacune des entiers de 1 à 54.
   Carte n°1 : $1, 4, 6, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 25, 27, 30, 33, 35, 38, 40, 43, 46, 48, 51, 53$
   Carte n°2 : $2, 7, 10, 15, 20, 23, 28, 31, 36, 41, 44, 49, 54$
   Carte n°3 : $3, 4, 11, 12, 16, 17, 24, 25, 32, 33, 37, 38, 45, 46, 50, 51$
   Carte n°4 : $5, 6, 7, 18, 19, 20, 26, 27, 28, 39, 40, 41, 52, 53, 54$
   Carte n°5 : $8, 9, 10, 11, 12, 29, 30, 31, 32, 33, 42, 43, 44, 45, 46$
   Carte n°6 : $13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54$
   Carte n°7 : $21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33$
   Carte n°8 : $34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54$
   Vous demandez à une personne de l'assistance de choisir un entier au hasard, de 1 à 54.
   Vous lui demandez ensuite sur quelles cartes apparaît le numéro qu'elle a choisi.
   Sous les applaudissements, vous devinez le numéro mystérieux. Comment faites-vous ?
   (c) Deux joueurs participent au jeu suivant. Au départ, on dispose d'un tas de $n \geqslant 1$ haricots.
   Le premier en retire m ($1 \leqslant m < n$.) Le second en retire au moins un mais au plus $2m$.
   Plus généralement, chaque joueur doit retirer un nombre de haricots au moins égal à 1 et au plus égal au double du nombre de haricots que vient de retirer l'autre joueur.
   Le joueur qui retire le dernier haricot gagne la partie.
   Y-a-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur ?