Une famille d'arcs paramétrés

Pour tout réel a, on considère l'arc de $\mathbb{R}^2$ paramétré par $x(t)=\dfrac{1}{t(t^2-1)}$ et $y_a(t)=\dfrac{t(t-a)}{t^2-1}$.
On note Γ_a la courbe représentative de cet arc.

1. Montrer que Γ_{-a} se déduit de Γ_a par une transformation géométrique simple.
   Dans toute la suite, on se limitera donc à la condition $a \geqslant 0$.
2. (a) Préciser le domaine d'étude de l'arc Γ_a.

   (b) Indiquer les limites de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y_a(t)$ aux bornes du domaine d'étude.

   (c) Préciser le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ par intervalles.
   On sera notamment amené à distinguer les cas $a=0$, $0<a<1$, $a=1$ et $a>1$.
   Si $0<a<1$, on placera les racines $t_1<t_2$ de $y'(t)$ par rapport à $-1,0,1$.

   (d) Dresser les tableaux de variations des arcs Γ_a en discutant suivant les valeurs de a.
   On considèrera les cas : $a=0$, $0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$, $a=1$, $a>1$.
3. Montrer que Γ_a admet un point stationnaire si $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, pour la valeur $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
   Étudier la nature de ce point stationnaire.
4. (a) Indiquer les asymptotes horizontales ou verticales éventuelles des courbes Γ_a.

   (b) Étudier soigneusement l'asymptote oblique obtenue quand t tend vers 1. On précisera notamment le placement de la courbe par rapport à cette asymptote, ce qui conduira à considérer les cas $0 \leqslant a < 3/4$, $a=3/4$ et $a>3/4$.

   (c) Étudier soigneusement l'asymptote oblique obtenue quand t tend vers -1. On précisera notamment le placement de la courbe par rapport à cette aysmptote.
5. (a) Montrer que Γ_a n'admet de point double que si $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (b) Donner un paramétrage du lieu décrit par ce point double quand $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$.
6. (a) Montrer qu'une droite du plan rencontre Γ_a en au plus trois points.

   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les fonctions symétriques élémentaires de t_1,t_2,t_3, pour que $M(t_1),M(t_2),M(t_3)$ soient alignés sur Γ_a.

   (c) On suppose que la tangente au point $M(t)$ de Γ_a recoupe Γ_a en $M(t')$.
   Exprimer t' en fonction de t. Que se passe-t-il si $t=\frac{1}{2a}$?

   (d) Déterminer combien chaque courbe Γ_a possède de points d'inflexion.
7. Tracer les courbes Γ_a quand $a \in \{0,\frac{3}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{12}{13},1,2\}$.