

Cercles orthogonaux. Faisceaux de cercles.

On se place dans \mathbb{R}^2 , muni de sa structure usuelle de plan euclidien.

Pour tout point A et tout réel $r > 0$, on notera $\mathcal{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre A et de rayon r (on ne considérera dans ce problème que des cercles ayant un rayon strictement positif.)

Pour tous points A et B , on notera AB la longueur du segment $[A, B]$.

Première partie : cercles orthogonaux

On dit que deux cercles $\mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$ sont *orthogonaux* si $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

1. On se donne deux cercles quelconques $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$.

Montrer que ces deux cercles sont sécants (c'est-à-dire se coupent en deux points disjoints) si et seulement si on a la double inégalité : $|r_2 - r_1| < \Omega_1\Omega_2 < r_1 + r_2$.

En déduire que deux cercles orthogonaux sont sécants.

2. Soit A l'un des deux points d'intersection de deux cercles sécants \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Soit D_1 (resp. D_2) la tangente en A au cercle \mathcal{C}_1 (resp. \mathcal{C}_2).

Montrer que \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont orthogonaux si et seulement si D_1 et D_2 sont orthogonales.

3. On se donne un cercle $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$, et un point Ω_2 .

Montrer que Ω_2 est le centre d'un cercle \mathcal{C}_2 orthogonal à $\mathcal{C}_1 \Leftrightarrow \Omega_2$ est extérieur à \mathcal{C}_1 .

Montrer que \mathcal{C}_2 est unique. En donner une construction à la règle et au compas.

4. Pour tout vecteur $v = (a, b, c)$ de \mathbb{R}^3 , on note $\Phi_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall M(x, y) \in \mathbb{R}^2, \Phi_v(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$

On note $\Gamma(v)$ l'ensemble des points $M(x, y)$ de \mathbb{R}^2 tels que $\Phi_v(M) = 0$.

Pour tous $\begin{cases} v_1 = (a_1, b_1, c_1) \\ v_2 = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$, on pose enfin $\varphi(v_1, v_2) = 2(a_1a_2 + b_1b_2) - c_1 - c_2$.

- (a) Discuter, en fonction du vecteur v , la nature de l'ensemble $\Gamma(v)$.

Vérifier notamment que $\Gamma(v)$ est un cercle si et seulement si $\varphi(v, v) > 0$.

- (b) Soient v_1, v_2 dans \mathbb{R}^3 , tels que $\mathcal{C}_1 = \Gamma(v_1)$ et $\mathcal{C}_2 = \Gamma(v_2)$ soient des cercles du plan.

Montrer que \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont orthogonaux si et seulement si $\varphi(v_1, v_2) = 0$.

5. (a) Déterminer les cercles orthogonaux simultanément à $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$
On illustrera le résultat par une figure.

- (b) Même question en considérant maintenant les cercles $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 7 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

- (c) Même question avec $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x+3)^2 + y^2 = 6 \end{cases}$

Vérifier en outre que les cercles obtenus passent par deux points fixes.

Deuxième partie : axe radical de deux cercles

Soit $\mathcal{C}(\Omega, r)$ un cercle de centre Ω et de rayon r .

Pour tout M de \mathbb{R}^2 , on dit que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = (\Omega M)^2 - r^2$ est la *puissance* de M par rapport à \mathcal{C} .

Avec cette définition, il est clair que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) > 0$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = 0$, resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) < 0$) si et seulement si M est extérieur (resp. appartient, resp. est intérieur) au cercle \mathcal{C} .

1. (a) Soit M un point du plan, et A, B deux points diamétralement opposés sur \mathcal{C} .
Montrer que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = (\overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB})$.
 - (b) Soit M un point, et D une droite passant par M et rencontrant $\mathcal{C}(\Omega, r)$ en P et Q .
Montrer que $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M)$ (on appréciera deux démonstrations.)
Qu'obtient-on si la droite D est tangente au cercle \mathcal{C} ?
 - (c) Réciproquement, soit D et Δ deux droites sécantes en un point M .
On se donne deux points P, Q sur D et deux points R, S sur Δ .
On suppose qu'on a l'égalité $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MR} \cdot \overline{MS}$.
Montrer que les quatre points P, Q, R, S sont cocycliques.
2. Soient $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$ deux cercles non concentriques.
On appelle *axe radical* de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 et on note $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ l'ensemble des points du plan qui ont la même puissance par rapport à ces deux cercles.
 - (a) Montrer que $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ est une droite orthogonale à la droite $(\Omega_1\Omega_2)$.
 - (b) Identifier $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ quand \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont tangents ou sécants.
 - (c) Dans le cas où \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont disjoints, donner une construction de la droite $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ à la règle et au compas (on pourra utiliser deux cercles auxiliaires).
On fera deux figures (la première quand \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont extérieurs l'un à l'autre, et la deuxième quand l'un des deux cercles est intérieur à l'autre.)
 3. On se donne deux cercles $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$, non concentriques.
Montrer qu'un point Ω est le centre d'un cercle orthogonal à la fois à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 si et seulement si Ω est extérieur à ces deux cercles et appartient à leur axe radical.
 4. (a) On se donne trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ dont les centres ne sont pas alignés.
Montrer qu'il existe un unique point M du plan ayant même puissance par rapport aux trois cercles. Ce point est appelé *centre radical* des trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.
 - (b) Soient A, B, C trois points non alignés du plan.
Montrer que l'orthocentre du triangle ABC est aussi le centre radical des trois cercles de diamètres respectifs AB, AC, BC .
 - (c) On se donne trois cercles $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1), \mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2), \mathcal{C}_3(\Omega_3, r_3)$, orthogonaux deux à deux.
Montrer que l'axe radical de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ est l'orthocentre du triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$.

Troisième partie : faisceaux de cercles

Pour toute droite \mathcal{D} et tout cercle \mathcal{C} , on note $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ la réunion de \mathcal{C} et de l'ensemble des cercles \mathcal{C}' tels que $\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \mathcal{D}$; $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ est appelé *faisceau de cercles* engendré par \mathcal{D} et \mathcal{C} .

1. Dans cette question on décrit le faisceau $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ selon la position de la droite \mathcal{D} par rapport au cercle \mathcal{C} . On accompagnera chacun des résultats obtenus d'une figure.
 - (a) On suppose que la droite \mathcal{D} rencontre le cercle \mathcal{C} en deux points distincts A, B .
Montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ est l'ensemble des cercles passant par A et B .
On dit alors que $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ est le faisceau de *points de base* A et B .
 - (b) On suppose que la droite \mathcal{D} est tangente au cercle \mathcal{C} en un point A .
Établir que $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ est l'ensemble des cercles tangents à \mathcal{D} en A .
 - (c) On suppose maintenant que la droite \mathcal{D} ne rencontre pas le cercle \mathcal{C} .
Soit H la projection orthogonale sur \mathcal{D} du centre Ω de \mathcal{C} .
Par le point H (qui est donc extérieur à \mathcal{C}), on mène le cercle $\widehat{\mathcal{C}}$ orthogonal à \mathcal{C} .
Montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ est l'ensemble des cercles orthogonaux à $\widehat{\mathcal{C}}$ et centrés sur (ΩH) .
Si on note J, K les points d'intersection du cercle $\widehat{\mathcal{C}}$ et de la droite (ΩH) , on dit que $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ est le faisceau de *points-limites* J, K .
2. (a) Soit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ trois cercles (deux à deux non concentriques) et \mathcal{D} une droite du plan.
On suppose que $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3) = \mathcal{D}$. Montrer que $\Delta(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) = \mathcal{D}$.
 - (b) Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques, et soit \mathcal{D} une droite.
Montrer que $\mathcal{C}' \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C} \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}') \Leftrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}')$.
3. Soit \mathcal{D} une droite d'équation $f(x, y) = 0$, avec $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$.
Soit \mathcal{C} un cercle d'équation $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (cf question I.4.)
 - (a) Pour tout point $M(x, y)$, montrer que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = \Phi(M)$.
 - (b) En déduire que l'équation de tout cercle du faisceau $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ s'écrit sous la forme $\Phi(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - (c) Montrer que tout point qui n'est pas sur \mathcal{D} est sur un unique cercle de $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$.
4. On se donne un cercle \mathcal{C} , une droite \mathcal{D} , et on note \mathcal{F} le faisceau $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$.
 - (a) On suppose qu'un cercle \mathcal{C}' est orthogonal à deux cercles distincts \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de \mathcal{F} .
Montrer qu'alors \mathcal{C}' est orthogonal à tout cercle du faisceau \mathcal{F} .
Indication : on formera l'équation générale d'un cercle de \mathcal{F} et on utilisera I.4.
 - (b) Montrer qu'un cercle \mathcal{C}' est orthogonal à tous les cercles du faisceau \mathcal{F} si et seulement si il est centré sur \mathcal{D} et orthogonal au cercle \mathcal{C} .
5. Montrer que les cercles orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau \mathcal{F} forment eux-même un faisceau \mathcal{F}' . On dit alors que \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont deux faisceaux orthogonaux (ou *conjugués*).
Décrire en particulier le faisceau \mathcal{F}' dans chacun des cas étudiés dans la question III.1
6. Soit \mathcal{C} un cercle du faisceau de points-limites A, B .
Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ (avec $\lambda \neq 1$) tel que : $\forall M \in \mathcal{C}, \frac{MA}{MB} = \lambda$.
Qu'obtient-on d'analogue avec un cercle du faisceau de points de base A, B ?