Exercices de bon niveau sur les nombres réels

Exercice 1

Montrer que tout n de $\mathbb{N}$, on a $\left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$ et $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$.

Exercice 2

Montrer que pour tous a, b de $\mathbb{N}^*$ on a $\left|\frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| > \frac{1}{4b^2}$.

Exercice 3

Soient a, b, c des nombres réels. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$.
On suppose que $|P(x)| \leqslant 1$ pour tout x de $[-1, 1]$. Montrer que : $\forall\, x \in [-1, 1],\ |P'(x)| \leqslant 4$.

Exercice 4

Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer le minimum de $x \mapsto S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} |x - k|$.
Préciser quel(s) x ce minimum est atteint.

Exercice 5

Soit a, b, c les trois cotés d'un triangle. Montrer que $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3(a^3+b^3+c^3)+4abc$.

Exercice 6

Soit $\mathcal{S}$ une famille finie de segments de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\,(I, J) \in \mathcal{S}^2,\ I \cap J \neq \emptyset$.
Montrer que l'intersection de tous les segments I de $\mathcal{S}$ est non vide.

Exercice 7

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.

Exercice 8

Soient α et β deux nombres irrationnels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.

Montrer que $A = \{[n\alpha],\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{[n\beta],\ n \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 9

Montrer que l'ensemble $E = \{2^p 3^q,\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$.

Indication : prouver que $F = \{p \ln 2 + q \ln 3, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10

On note $f(n)$ le plus grand diviseur impair de n. Montrer que : $\forall\, n \geqslant 1,\ \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f(k)}{k} - \dfrac{2n}{3}\right| < 1$.

Exercice 11

On suppose que $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ pour tout x de $[-1, 1]$, avec (a, b, c) dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.
Montrer que $|b| \leqslant 8$ et que cette inégalité ne peut pas être améliorée.

Exercice 12

Trouver les applications de $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\, x \in E,\ f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 + x$.

Exercice 13

Montrer que $x = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 14

Soient a, b, c dans $\mathbb{Z}$ (non tous nuls) avec $|a|, |b|, |c| < 10^6$. Prouver $\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| > 10^{-20}$.
Montrer qu'il existe de tels entiers tels que $\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < 10^{-11}$.

Exercice 15

Trouver le maximum de $\sin^2 x \sin 2x$ sur $[0, \pi]$. En déduire $\left|\prod_{k=0}^{k=n} \sin 2^k x\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Exercice 16

Trouver le minimum de la somme $\sum_{k=1}^{n} x_k$ si on suppose $\prod_{k=1}^{n} x_k = \alpha > 0$ (les x_k étant > 0.)

Exercice 17

Soit $f : x \mapsto x + [\sqrt{x}]$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = m \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que l'un au moins des u_n est le carré d'un entier.