Entiers parfaits pairs

Dans tout ce problème, les entiers sont naturels : on travaille donc dans $\mathbb{N}$.
Si n est un entier non nul, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ (y compris 1 et n).
Ainsi, $S(1) = 1$, $S(2) = 3$, $S(833) = S(7^2 \cdot 17) = 1 + 7 + 17 + 49 + 119 + 833 = 1026$.
Un entier n est dit **parfait** lorsqu'il vérifie $S(n) = 2n$.
Le but de ce problème est la recherche des nombres parfaits pairs.
On notera $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$, de sorte que $S(n) = \sum_{k\in\mathcal{D}(n)} k$.

Question préliminaire : on note pour $n \in \mathbb{N}$, $M_n = 2^n - 1$.
Montrer que si $p, q \in \mathbb{N}$ alors M_p divise M_{pq}.
En déduire que pour que M_n soit premier, il est nécessaire que n soit premier.

Partie I

1. Ecrire sans ruser une prodécure Maple prenant en paramètre un entier n (que l'on supposera ≥ 1 sans le tester) et retournant `true` ou `false` suivant que n est parfait ou pas. On rappelle que `irem(n,k)` vaut le reste de la division euclidienne de n par k.
2. Expliquer (sans programmer) comment on pourrait améliorer l'efficacité de cette procédure.
3. Montrer que n est premier ssi $S(n) = n + 1$.
4. Si p est premier et si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathcal{D}(p^n)$ et montrer que $S(p^n) = \dfrac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$.

Partie II

On considère dans cette partie $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$.
Nous allons montrer que $S(ab) = S(a)S(b)$.

Soit f l'application définie sur $\mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$ par $f(x, y) = xy$.

1. Montrer que f est à valeurs dans $\mathcal{D}(ab)$.
2. Montrer que si $u|a$ et $v|b$ alors $u \wedge v = 1$.
3. En déduire que f est injective.
4. Montrer que f est surjective : on pourra prendre d dans $\mathcal{D}(ab)$ et considérer $x = d \wedge a$.
5. Etablir que $S(ab) = S(a)S(b)$.
6. Montrer que ceci fournit une nouvelle méthode pour calculer $S(n)$.
   Comparer avec la méthode utilisée dans la procédure Maple.

Partie III

On va montrer que n pair est parfait si et seulement si il est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ avec $2^p - 1$ premier.

1. Soit p dans $\mathbb{N}^*$ tel que $2^p - 1$ est premier.
   Montrer que $2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait pair.
   On considère désormais un nombre parfait pair n.
2. Montrer que n a au moins un facteur premier impair.
   Ainsi, on peut écrire : $n = 2^a b$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \geq 3$ impair.
3. Montrer qu'il existe c dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\begin{cases} b = (2^{a+1} - 1)c \\ S(b) = 2^{a+1}c \end{cases}$
4. Montrer par l'absurde que $c = 1$.
5. En déduire que b est premier puis que $a + 1$ est premier. Conclure.
6. Donner trois nombres parfaits pairs.
7. On ne sait pas grand chose sur les nombres parfaits impairs : montrer tout de même que si n est parfait et impair alors il admet au moins trois diviseurs premiers distincts.