Développantes d'une astroïde

On se place dans le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$.

Pour tout m de $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{C}_m$ l'arc $t \mapsto M_m(t) = \begin{pmatrix} x_m(t) \\ y_m(t) \end{pmatrix}$ défini par $\begin{cases} x_m(t) = \cos^3 t + m \sin t \\ y_m(t) = \sin^3 t + m \cos t \end{cases}$

1. (a) Procéder à une réduction du domaine d'étude pour $\mathcal{C}_m$.
   Montrer notamment que $\mathcal{C}_m$ admet un centre et deux axes de symétrie.

   (b) Montrer que $\mathcal{C}_{-m}$ est symétrique de $\mathcal{C}_m$ par rapport à l'axe Ox.

2. (a) Montrer que $\mathcal{C}_m$ admet des points stationnaires si et seulement si $|m| \leqslant \frac{3}{2}$.
   Montrer que si $|m| < \frac{3}{2}$ ce sont des points de rebroussement. Et si $|m| = \frac{3}{2}$?
   Vérifier que $e_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ dirige toujours la tangente en $M_m(t)$ à $\mathcal{C}_m(t)$.

   (b) On note Γ l'ensemble des points stationnaires des arcs $\mathcal{C}_m$.
   Montrer qu'un paramétrage de Γ est $t \mapsto M(t) \begin{cases} x(t) = 3\cos t - 2\cos^3 t \\ y(t) = 3\sin t - 2\sin^3 t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Etudier et tracer l'arc Γ.
   Vérifier que la tangente en $M(t)$ à Γ est toujours dirigée par $e_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

   (d) Soit $\mathcal{R}$ le repère déduit du repère canonique par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   Montrer qu'un paramétrage de Γ dans $\mathcal{R}$ est $\begin{cases} X(u) = 2\cos^3 u \\ Y(u) = 2\sin^3 u \end{cases}$ (Any comment ?)

   (e) Dans cette question, on suppose que $|m| \leqslant \frac{3}{2}$. Soit A un point stationnaire de $\mathcal{C}_m$.
   Le point A appartient donc également à la courbe Γ.
   Montrer qu'au point A les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ et Γ sont orthogonales.

3. (a) Pour quelles valeurs de m l'arc $\mathcal{C}_m$ passe-t-il par l'origine ?

   (b) Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}_{1/2}$.

4. (a) Ecrire l'équation de la tangente $\mathcal{D}_m(t)$ au point $M_m(t)$ de $\mathcal{C}_m$.

   (b) Soit $H_m(t)$ la projection orthogonale de O sur la droite $\mathcal{D}_m(t)$.
   On note $\mathcal{P}_m$ la trajectoire du point $H_m(t)$ quand $M_m(t)$ décrit $\mathcal{C}_m$.
   Montrer que $\mathcal{P}_m$ admet le paramétrage $\rho = m + \frac{1}{2}\sin 2\theta$ en polaires.

   (c) Etudier et tracer la courbe $\mathcal{P}_{1/2}$.

5. Etudier et tracer les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{3/4}$, $\mathcal{C}_{3/2}$.

6. (a) Soit $\mathcal{D}(\theta)$ la droite passant par O et d'angle polaire θ.
   Cette droite rencontre (en général) $\mathcal{D}_m(\theta)$ en un unique point $N_m(\theta)$.
   Trouver un paramétrage en polaires de la trajectoire du point $N_m(\theta)$.

   (b) Etudier et construire cette trajectoire quand $m = \frac{1}{2}$.

7. (a) On fixe le réel t. Montrer que la tangente $\Delta(t)$ au point $M(t)$ de Γ est aussi la normale en $M_m(t)$ de la courbe $\mathcal{C}_m$, et ceci pour tout m de $\mathbb{R}$.

(b) On oriente $\Delta(t)$ par le vecteur $e_2(t)$ (cf question 2c.)
Pour tous réels m et n, préciser la mesure algébrique de $\overline{M_m(t)M_n(t)}$ sur $\Delta(t)$.
Qu'en déduit-on concernant les courbes $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_n$?

8. Dans cette question, on suppose $m > \dfrac{3}{2}$.
D'après la question (2a), la courbe $\mathcal{C}_m$ ne présente pas de point stationnaire.
On oriente $\mathcal{C}_m$ dans le sens des paramètres t croissants.
On munit alors $\mathcal{C}_m$ d'une abscisse curviligne (d'origine quelconque sur cet arc.)
   (a) Calculer la longueur totale de l'arc $\mathcal{C}_m$.
   (b) Préciser le repère de Frenet $(\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ au point $M_m(t)$ de l'arc $\mathcal{C}_m$.
   (c) Calculer le rayon de courbure $R_m(t)$ au point $M_m(t)$ de $\mathcal{C}_m$.
   (d) Préciser les coordonnées du centre de courbure $\Omega_m(t)$ au point $M_m(t)$ de $\mathcal{C}_m$.
   Quelle est la trajectoire du point $\Omega_m(t)$ quand $M_m(t)$ parcourt $\mathcal{C}_m$?

9. Reprendre la question précédente en supposant cette fois $0 \leqslant m \leqslant \dfrac{3}{2}$.
Pour simplifier les calculs on pourra poser $m = \dfrac{3}{2}\sin 2t_0$, avec $0 \leqslant t_0 \leqslant \frac{\pi}{4}$.
On déterminera encore la longueur totale de $\mathcal{C}_m$ mais pour le calcul de $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, R, \Omega$ on se placera sur un sous-arc sans point stationnaire (orienté dans le sens des t croissants.)
On conviendra qu'en un point stationnaire M on a $R = 0$ donc $\Omega = M$.