Bijections de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$

1. Pour tout p de $\mathbb{N}$, on note $\begin{cases} D_p = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2, x+y=p\} \\ S_p = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2, x+y<p\} \end{cases}$

   (a) Vérifier que la famille $(D_p)_{p\geqslant 0}$ constitue une partition de $\mathbb{N}^2$.

   (b) Calculer le cardinal d_p de l'ensemble D_p, et le cardinal s_p de l'ensemble S_p.

2. Dans cette question, on forme une bijection f de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.
   Pour tout couple (x,y) d'entiers natruels, on pose $f(x,y) = x + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}$.

   (a) Vérifier que l'on définit bien ainsi une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

   (b) Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{N}^2$, on a : $s_{x+y} \leqslant f(x,y) < s_{x+y+1}$.

   (c) On se donne deux éléments (x,y) et (x',y') de $\mathbb{N}^2$, tels que $f(x,y) = f(x',y')$.
   Montrer que $x+y = x'+y'$, puis que $(x,y) = (x',y')$. Conclusion ?

   (d) Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique p de $\mathbb{N}$ tel que $s_p \leqslant n < s_{p+1}$.

   (e) Avec les notations précédentes, calculer $f(n-s_p, s_{p+1}-n-1)$.
   En déduire que f est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

   (f) Quel est l'antécédent de l'entier 1000 par l'application f ?

   (g) Interpréter graphiquement la signification de l'application f.

3. Dans cette question, on forme (à partir de f) une bijection g de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$.
   Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{N}^3$, on pose $g(x,y,z) = f(x, f(y,z))$.

   (a) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$.

   (b) Quel est l'antécédent de l'entier 1000 par l'application g ?

4. On va généraliser ce qui précède en formant f_k bijective de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$, pour tout $k \geqslant 1$.
   On définit donc les applications f_k de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :

   — Tout d'abord, f_1 est l'application identité de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

   — Ensuite, si $k \geqslant 2$ et si on suppose que f_{k-1} est connue, on pose :
   Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de $\mathbb{N}^k$, $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, f_{k-1}(x_2, \ldots, x_k))$.

   (a) Vérifier les égalités $f_2 = f$ et $f_3 = g$.

   (b) Pour tout $k \geqslant 1$, montrer que l'application f_k est une bijection de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$.

   (c) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $f_k(0, \ldots, 0, 1) = 1$.
   En déduire l'antécédent de l'entier 1000 par l'application f_k, pour tout $k \geqslant 4$.

5. La question (4) montre que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^k$.
   On rappelle que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

   Dans cette question, on va montrer qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   Il suffit bien sûr de montrer qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

   Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, surjective.
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'application $\varphi(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est notée φ_n pour simplifier les notations.

   Conclure en considérant $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, h(n) = \varphi_n(n) + 1$.

6. Cette question généralise les notations et résultats de la question (1).

   Pour tout (k,p) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note : $\begin{cases} D_{k,p} = \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}^k, x_1+\cdots+x_k = p\} \\ S_{k,p} = \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}^k, x_1+\cdots+x_k < p\} \end{cases}$

   Remarque : avec $k=2$, on retrouve bien $D_{2,p} = D_p$ et $S_{2,p} = S_p$.

   (a) On se donne n dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $q \geqslant n$, on a $\displaystyle\sum_{m=n}^{q} \binom{m}{n} = \binom{q+1}{n+1}$

   (b) On note $s(k,p)$ le cardinal de l'ensemble $S_{k,p}$.

   Par une récurrence sur l'entier $k \geqslant 1$, montrer que $s(k,p) = \dbinom{k+p-1}{k}$.

   (c) En déduire le cardinal $d(k,p)$ de l'ensemble $D_{k,p}$.

   (d) Soient $k \geqslant 1$ et $p \geqslant 0$. Montrer que $s(k,p+1) + s(k+1,p) = s(k+1,p+1)$.

   (e) Montrer que pour $k \geqslant 1$ donné, la suite $p \mapsto s(k,p)$ est strictement croissante.

7. Dans cette question, on généralise la définition des applications f, g de manière à former à nouveau des bijections g_k de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$, pour tout entier $k \geqslant 1$.

   La méthode de construction des g_k diffère cependant de celle vue à la question (4).

   On utilise les notations et les résultats de la question (6).

   La démonstration de la bijectivité des g_k généralise celle vue dans la question (2).

   Pour tout $k \geqslant 1$ et tout $(x_1,\ldots,x_k)$ de $\mathbb{N}^k$, on pose :

   $$g_k(x_1,\ldots,x_k) = s(1,x_1) + s(2,x_1+x_2) + \cdots + s(k,x_1+\cdots+x_k) = \sum_{j=1}^{k} s(j,x_1+\cdots+x_j)$$

   On observera qu'avec cette définition, et pour tout $k \geqslant 1$, on a :

   $$(E) \qquad g_{k+1}(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}) = g_k(x_1,\ldots,x_k) + s(k+1,x_1+\cdots+x_{k+1})$$

   (a) Vérifier les égalités $g_1 = f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $g_2 = f_2 = f$.

   Expliciter l'application g_3. A-t-on $g_3 = f_3$ (c'est-à-dire $g_3 = g$) ?

   (b) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et tout $(x_1,\ldots,x_k)$ de $\mathbb{N}^k$, on a l'encadrement :

   $$s(k,x_1+\ldots+x_k) \leqslant g_k(x_1,\ldots,x_k) < s(k,x_1+\ldots+x_k+1).$$

   Indication : raisonner par récurrence sur k, et utiliser les questions (6d) et (6e).

   (c) On se donne $(x_1,\ldots,x_k)$ et $(x'_1,\ldots,x'_k)$ dans $\mathbb{N}^k$.
   On suppose en outre que $g_k(x_1,\ldots,x_k) = g_k(x'_1,\ldots,x'_k)$.
   Montrer que $x_1+\cdots+x_k = x'_1+\cdots+x'_k$.

   (d) Déduire de ce qui précède que les applications $(g_k)_{k\geqslant 1}$ sont injectives.

   (e) On se donne deux entiers $k \geqslant 1$ et $p \geqslant 0$, et $(x_1,\ldots,x_k)$ dans $\mathbb{N}^k$.

   En utilisant les questions (6d) et (7b), montrer l'équivalence :

   $$g_k(x_1,\ldots,x_k) < s(k,p) \Leftrightarrow (x_1,\ldots,x_k) \in S_{k,p}.$$

   En déduire que l'application g_k est une bijection de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$.