# Valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$

On dit qu'une application $\mu$ définie sur l'ensemble des rationnels, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, est une *valeur absolue* sur $\mathbb{Q}$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

— L'application $\mu$ n'est pas constante.

— Pour tous rationnels $r$ et $s$, on a $\mu(r+s) \leqslant \mu(r)+\mu(s)$ et $\mu(rs)=\mu(r)\mu(s)$.

L'application valeur absolue usuelle $r \mapsto |r|$ vérifie bien sûr ces propriétés.
Le but du problème est de déterminer toutes les valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$.

## Première partie

Dans cette partie, $\mu$ désigne une valeur absolue quelconque sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\mu(0)=0$ et que $\mu(1)=1$.
2. Prouver que $\mu(r)>0$ pour tout $r$ de $\mathbb{Q}^*$.
3. Soit $r$ dans $\mathbb{Q}$, et $s$ dans $\mathbb{Q}^*$. Exprimer $\mu(r/s)$ en fonction de $\mu(r)$ et $\mu(s)$.
4. Vérifier que, pour tout $r$ de $\mathbb{Q}$, $\mu(-r)=\mu(r)$.
5. Prouver que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $\mu(n) \leqslant n$.

## Deuxième partie

Dans cette partie, $\mu$ désigne une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ vérifiant l'hypothèse suivante :

$$\text{(H) : } \textit{Il existe un entier } b \geqslant 2 \textit{ tel que } \mu(b)>1$$

1. Dans cette question, on se donne un entier $a \geqslant 2$. On va montrer que $\mu(a)>1$.
   (a) Si $\mu(a)<1$, montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $\mu(n) \leqslant \dfrac{a-1}{1-\mu(a)}$. Conclure.
   Indication : utiliser l'écriture de $n$ en base $a$.
   (b) Si $\mu(a)=1$, montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \mu(b)^k \leqslant (a-1)(1+k\log_a(b))$ et conclure.
2. On veut maintenant montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{Q}$, on a : $0<x<1 \Rightarrow \mu(x)<1$.
   (a) Soit $(u,v)$ dans $\mathbb{N}^2$, avec $1 \leqslant u < v$, et $x=\dfrac{u}{v}$. Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$.
   Montrer qu'il existe des entiers $r_1,\ldots,r_n$ de $[\![0,v[\![$ tels que $x^n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{v^i}$.
   (b) On suppose $x^n<v^{-k}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Vérifier $k<n$ et $r_1=\cdots=r_k=0$.
   Montrer que $\mu(x)^n \leqslant \dfrac{v-1}{\mu(v)^k(\mu(v)-1)}$. Conclure en choisissant bien $k$ puis $n$.
3. Déduire de la question précédente que $\mu$ est croissante sur $\mathbb{Q}^{+*}$.
4. Dans cette question, on utilise les résultats du DM n°10...
   (a) Montrer que $G=\{\log_b(\mathbb{Q}^{+*}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $t \mapsto \log_b(\mu(b^t))$ est un morphisme croissant de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$.
   (c) En déduire l'existence d'un réel $\lambda>0$ tel que, pour tout $r$ de $\mathbb{Q}$, $\mu(r)=|r|^\lambda$.
   (d) Réciproquement, déterminer les $\lambda$ de $\mathbb{R}^{+*}$ pour lesquels $r \mapsto |r|^\lambda$ est une valeur absolue de $\mathbb{Q}$ (on pourra étudier le signe de $h_\lambda(x)=x^\lambda+1-(x+1)^\lambda$ sur $\mathbb{R}^{+*}$).

## Troisième partie

Dans cette partie, on suppose que l'hypothèse $(H)$ n'est plus réalisée.
Autrement dit, on suppose que pour tout $b$ de $\mathbb{N}$, avec $b \geqslant 2$, on a $\mu(b) \leqslant 1$.

1. Déterminer l'application $\mu$ si on suppose que $\mu(b) = 1$ pour tout $b$ de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
2. A partir de cette question, on suppose qu'il existe $b$ dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $\mu(b) < 1$.
   Montrer l'existence d'un entier naturel premier $p$ tel que $\mu(p) < 1$.
3. Soit $q$ un entier naturel premier, distinct de $p$, et soit $k$ dans $\mathbb{N}^*$.
   Prouver (avec l'identité de Bezout) que $\mu(p)^k + \mu(q)^k \geqslant 1$. En déduire $\mu(q) = 1$.
4. Pour tout $x$ de $\mathbb{Z}^*$, on définit la valuation de $x$ relativement à $p$ :
   — On pose $v_p(x) = 0$ si $p$ ne divise pas $x$.
   — Sinon, $v_p(x)$ est l'exposant de $|x|$ dans sa factorisation en produit de facteurs premiers.
   (a) Vérifier que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ pour tous $a, b$ de $\mathbb{Z}^*$.
   (b) Montrer qu'on peut, et de façon unique, prolonger $v_p$ en un morphisme (que l'on notera encore $v_p$) de $(\mathbb{Q}^*, \times)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.
5. Établir l'existence d'un réel $a$ de $]0, 1[$ tel que : $\begin{cases} \mu(r) = a^{v_p(r)} & \text{si } r \in \mathbb{Q}^* \\ \mu(0) = 0 \end{cases}$
6. Déduire de tout ce qui précède les trois types de valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$.