Le théorème de Morley

En 1899, **Frank Morley**, de nationalité anglaise, alors professeur au **Haverford College** (Pennsylvanie), découvrit un résultat qui figure aujourd'hui parmi les joyaux de la géométrie, et connu sous le nom de théorème (ou plus emphatiquement "miracle") de Morley.

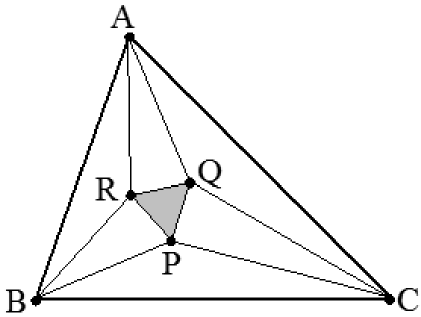
Voici comment s'énonce ce résultat :

Soit A, B, C trois points non alignés du plan.

On construit les trisectrices *intérieures au triangle ABC, qui partagent donc les angles aux sommets en trois angles égaux.*

Ces trisectrices se coupent deux à deux aux points P, Q, R, comme l'indique la figure.

Alors le triangle PQR est équilatéral.



Le qualificatif de "miraculeux" tient au fait qu'un résultat aussi simple dans son énoncé (mais pas dans ses différentes démonstrations) n'ait été découvert que vers le début du 20e siècle.

Ce problème est consacré à l'étude de quelques-unes des preuves de ce théorème.

I. Les preuves de Adolphe Letac (1939) et de Leon Bankoff (1962)

On pose $(\widehat{AB, AC}) = 3\alpha$, $(\widehat{BC, BA}) = 3\beta$, $(\widehat{CA, CB}) = 3\gamma$, avec α, β, γ dans $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.
Avec ces notations, on a bien sûr l'égalité $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.
On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs des cotés du triangle ABC.
P, Q, R sont définis comme ci-dessus. Soit r le rayon du cercle circonscrit à ABC.

1. Justifier les égalités $\dfrac{a}{\sin 3\alpha} = \dfrac{b}{\sin 3\beta} = \dfrac{c}{\sin 3\gamma} = 2r$.
2. Par une méthode analogue appliquée à BPC, montrer que $\dfrac{BP}{\sin\gamma} = 2r\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}$.
3. Montrer que $\sin 3x = 4\sin x\, \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ pour tout x.
   En déduire une nouvelle expression de la longueur BP en fonction de r, α, γ.
   Par analogie donner l'expression de la longueur BR en fonction de r, α, γ.
4. Soit x, y, z trois réels tels que $x + y + z = \pi$.
   Prouver l'égalité : $\sin^2 x + \sin^2 y - 2\sin x \sin y \cos z = \sin^2 z$.
5. Développer l'égalité $\|\overrightarrow{PR}\|^2 = \|\overrightarrow{BR} - \overrightarrow{BP}\|^2$.
   En déduire $PR = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ et conclure (fin de la méthode de **Adolphe Letac**)
6. La méthode de **Leon Bankoff** est une variante qui se place à l'issue de la question (3).
   On pose $x = \frac{\pi}{3} + \gamma$, $y = \frac{\pi}{3} + \alpha$, $(\widehat{PR, PB}) = x'$ et $(\widehat{RB, RP}) = y'$, avec x', y' dans $]0, \pi[$.
   (a) Observer que $BP\sin x = BR\,\sin y$ et que $BP\sin x' = BR\,\sin y'$.
   (b) Prouver l'égalité $x' + y' = x + y$ et en déduire $x' = x$ et $y' = y$.
   (c) Par analogie, préciser la valeur $(\widehat{PC, PQ})$. En déduire $(\widehat{PQ, PR}) = \frac{\pi}{3}$ et conclure.

II. La preuve de Donald J. Newman (1996)

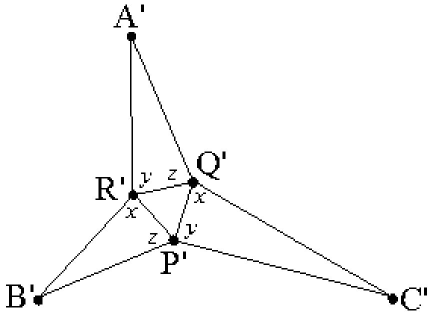
Au lieu de partir du triangle ABC pour former et étudier PQR, certaines démonstrations, comme celle de D.J.Newman, consistent à partir d'un triangle équilatéral et à reformer autour de lui le triangle ABC (ou du moins un triangle semblable à ABC.)

On se donne donc un triangle équilatéral $P'Q'R'$, que l'on suppose d'arête a pour fixer les idées.

Soit α, β, γ dans $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, avec $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Pour simplifier les notations, on note :

$x = \frac{\pi}{3} + \alpha$, $y = \frac{\pi}{3} + \beta$ et $z = \frac{\pi}{3} + \gamma$.



A l'extérieur de $P'Q'R'$, on mène $P'C'Q'$, $Q'A'R'$, $R'B'P'$ tels que :

$(P'\widehat{C',P'}Q') = y \quad (Q'\widehat{P',Q'}C') = x$

$(Q'\widehat{A',Q'}R') = z \quad (R'\widehat{Q',R'}A') = y$

$(R'\widehat{B',R'}P') = x \quad (P'\widehat{R',P'}B') = z$

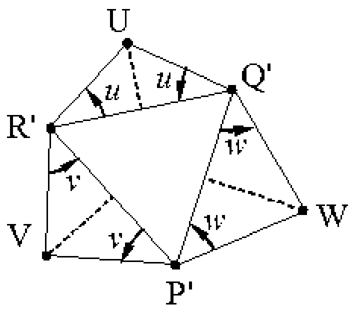
1. Préciser la mesure des angles $(A'\widehat{R',A'}Q')$, $(B'\widehat{P',B'}R')$ et $(C'\widehat{Q',C'}P')$.
2. Prouver les égalités $B'P' \sin\beta = a \sin x = C'P' \sin\gamma$.
3. Montrer que $(P'\widehat{B',P'}C') = \pi - \beta - \gamma$.
4. En déduire que $(B'\widehat{C',B'}P') = \beta$ et $(C'\widehat{P',C'}B') = \gamma$.
5. Conclure.

III. La preuve de Nikos Dergiades (1991)

Comme dans la partie précédente, on se donne le triangle équilatéral $P'Q'R'$ d'arête a et on définit les réels α, β, γ strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{3}$, tels que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Pour simplifier les notations, on note :

$u = \frac{\pi}{3} - \alpha$, $v = \frac{\pi}{3} - \beta$ et $w = \frac{\pi}{3} - \gamma$.



Sur chacun des cotés du triangle $P'Q'R'$, et vers l'extérieur, on mène des triangles isocèles, dont les angles à la base sont respectivement égaux à u, v, w (voir figure ci-contre.)

On note ensuite :

$A' = (VR') \cap (WQ')$, $B' = (UR') \cap (WP')$, $C' = (VP') \cap (UQ')$.

1. Montrer que la droite UP' est la bissectrice intérieure issue de U au triangle $UB'C'$..
2. Montrer que $(P'\widehat{B',P'}C') = \frac{1}{2}\left(\pi + (U\widehat{B',U}C')\right)$
3. On note I le centre du cercle inscrit au triangle $UB'C'$.
   Montrer que $(I\widehat{B',I}C') = \frac{1}{2}\left(\pi + (U\widehat{B',U}C')\right)$ et en déduire $P' = I$.
4. Prouver alors que les droites $(B'P')$, $(B'R')$, $(C'Q')$, $(C'P')$, $(A'R')$ et $(A'Q')$ sont les trisectrices intérieures du triangle $A'B'C'$.
5. Montrer que $(A'\widehat{B',A'}C') = 3\alpha$, $(B'\widehat{C',B'}A') = 3\beta$, $(C'\widehat{A',C'}B') = 3\gamma$ et conclure.

IV. La preuve d'Alain Connes (1998)

On identifie le plan affine euclidien orienté avec l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On identifie toute application f du plan dans lui-même avec l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à l'affixe z d'un point quelconque M associe l'affixe Z du point-image $f(M)$.

Comme indiqué au début de l'énoncé, on se donne le triangle ABC et les points P, Q, R.

On note $\widehat{a} = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $\widehat{b} = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ et $\widehat{c} = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.

Soit ρ_1, ρ_2, ρ_3 les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angles $\theta_1 = \frac{2\widehat{a}}{3}$, $\theta_2 = \frac{2\widehat{b}}{3}$, $\theta_3 = \frac{2\widehat{c}}{3}$.

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on pose $\rho_1(z) = a_1 z + b_1$, $\rho_2(z) = a_2 z + b_2$, $\rho_3(z) = a_3 z + b_3$.

Pour simplifier les notations, on pose $\omega = a_1 a_2 a_3$.

1. Montrer que $\rho_1 \circ \rho_2$ (resp. $\rho_2 \circ \rho_3$, $\rho_3 \circ \rho_1$) est une rotation de centre R (resp. P, Q).
2. En déduire les affixes p, q, r de P, Q, R, en fonction de $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.
3. Par un argument géométrique, montrer que $\rho_1^3 \circ \rho_2^3 \circ \rho_3^3 = \mathrm{Id}$ (application identité).
4. En déduire $\begin{cases} \omega \in \{j, j^2\} \\ (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + a_1^3 a_2^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3 = 0 \end{cases}$
5. On pose $E = -\omega\, a_1^2 a_2 (a_1 - \omega)(a_2 - \omega)(a_3 - \omega)(p + \omega q + \omega^2 r)$.

   En utilisant les expressions de p, q, r, et le fait que ω est dans $\{j, j^2\}$, développer et simplifier l'expression E, pour obtenir finalement $E = 0$.
6. En déduire $p + \omega q + \omega^2 r = 0$, et montrer que PQR est un triangle équilatéral.