Point de Fermat dans un triangle.

1. Soit $M_1, M_2, \ldots, M_n$ une famille de n points du plan complexe, d'affixes respectifs $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

   Montrer que l'égalité $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ est réalisée si et seulement si les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont situés sur une même demi-droite issue de 0.

2. On se donne n point $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'affixes respectifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tous non nuls.

   Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, on pose $\omega_k = \dfrac{a_k}{|a_k|}$ et on suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k = 0$.

   Soit M un point quelconque du plan, d'affixe z.

   (a) Montrer que la somme $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\omega_k}\,(z - a_k)$ est indépendante de z, et que $S < 0$.

   (b) Prouver l'inégalité $\sum\limits_{k=1}^{n} |z - a_k| \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$.

   (c) Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si, pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, il existe μ_k dans $]-\infty, 1]$ tel que $z = \mu_k a_k$.

   (d) Interpréter géométriquement les conditions précédentes et en déduire, en fonction de la disposition des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité (E) : $\sum\limits_{k=1}^{n} |z - a_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$.

   Indication : on discutera suivant que les A_k sont alignés ou non avec O. On vérifiera que la condition d'alignement avec O n'est possible que si n est pair.

3. (a) Soient P et Q deux points distincts du plan.

   Identifier l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})} = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.

   Indiquer comment construire cet ensemble à la règle et au compas.

   (b) Dans le plan, on se donne trois A_1, A_2, A_3 non alignés. On suppose que la mesure de chaque angle intérieur au triangle $A_1A_2A_3$ est inférieure à $\frac{2\pi}{3}$.

   On appelle *point de Fermat* du triangle $A_1A_2A_3$ le point O pour lequelle la somme des distances $OA_1 + OA_2 + OA_3$ est minimum.

   Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité du point O, ainsi que sa construction à la règle et au compas.

   Indication : on cherchera à se placer dans la situation décrite dans la question (2), et on montrera notamment que les points images de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ forment un triangle équilatéral de centre O (d'ailleurs il sera commode, quitte à effectuer une rotation de centre O, de supposer que ω_1 est égal à 1.)