Raisonnements par récurrence

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

On pose $b_0 = 1$ et $b_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-a_k)$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que $b_{n+1} = 1 - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ pour tout n.

Exercice 2

On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Montrer que $\sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1$ pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 3

On se donne n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $[0,1]$. On pose $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |x_j - x_i|$.

Cette quantité est donc la somme des distances entre les différents x_i.

1. Montrer qu'on peut choisir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de telle sorte que :
   - Si n est pair ($n = 2m$) alors $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m^2$.
   - Si n est impair ($n = 2m+1$) alors $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m^2 + m$.
2. Montrer que les valeurs ainsi obtenues sont en fait des maximums.

Exercice 4

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on pose $x^{(0)} = 1$ et $x^{(n)} = x(x-1)\cdots(x-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$.

Montrer l'égalité $(x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{(k)} y^{(n-k)}$ pour tous réels x, y et tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 5

Étudier les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $0 < u_1 < u_0$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_n u_{n+1}}{2u_n - u_{n+1}}$ pour tout n.

Exercice 6

On se donne un réel a de $]0,1[$ et pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$.

Simplifier l'expression u_n et en déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 7

On une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum \cos(x_0 \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)$, où la somme est étendue à toutes les combinaisons possibles de signes devant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (et il y en a 2^n.)

$$\text{Ainsi } \begin{cases} S_1 = \cos(x_0 + x_1) + \cos(x_0 - x_1) \\ S_2 = \cos(x_0 + x_1 + x_2) + \cos(x_0 + x_1 - x_2) + \cos(x_0 - x_1 + x_2) + \cos(x_0 - x_1 - x_2) \end{cases}$$

Donner une expression factorisée de S_n.

Exercice 8

Déterminer les polynômes définis par $P_0(x) = 1$ et $P_n(x) = n\displaystyle\int_0^x P'_{n-1}(t+1)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 9

On définit les polynômes P_n par $\begin{cases} P_0(x) = 0 \\ P_1(x) = x - 2 \end{cases}$ et $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) + (1-x)P_n(x)$.

Donner l'expression de $P_n(x)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 10

On se donne une famille impaire $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1}$ de nombres complexes de module 1 et de partie entière positive ou nulle. Montrer que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_{2n+1}| \geqslant 1$. Peut-il y avoir égalité ?

Exercice 11

On se donne une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(n+1) \geqslant f(f(n)) + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Par récurrence sur n, montrer $m \geqslant n \Rightarrow f(m) \geqslant n$ (et en particulier $f(n) \geqslant n$.)
2. En déduire que f est strictement croissante.
3. Montrer que $f(n) < n + 1$ pour tout n, et en déduire l'unique solution f du problème.

Exercice 12

Pour toute partie A finie non vide de $\mathbb{N}$, on note $f(A)$ l'inverse du produit des éléments de A.
Calculer $u_n = \sum p(A)$, où la somme est étendue aux parties non vides de $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 13

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit $n + 2$ nombres distincts dans $E_n = \{1, \ldots, 2n\}$.
Montrer que l'au au moins est égal à la somme de deux autres.
Est-ce encore vrai si on en choisit seulement $n + 1$?

Exercice 14

On définit une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par la donnée de $u_0 > 0$ et par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1 + u_n^2}$ pour tout $n \geqslant 0$.
Calculer u_n pour tout n en fonction u_0, et en déduire $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.