Étude d'une famille de fonctions

Pour tout réel λ, on note f_λ l'application définie par $f_\lambda(x) = \dfrac{4x}{\lambda + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|}$.
On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ.

1. (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_\lambda$ de f_λ.
   Placer soigneusement, les uns par rapport aux autres, les réels de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_\lambda$.

   (b) Montrer qu'on peut prolonger f_λ par continuité aux points 0 et 4.
   Dans la suite, on supposera que f_λ est ainsi prolongée.

2. (a) Étudier la dérivabilité de f_λ en 0 et en 4 (on donnera l'allure de $\mathcal{C}_\lambda$.)

   (b) Étudier les asymptotes verticales de la courbe $\mathcal{C}_\lambda$.

   (c) Étudier l'application f_λ au voisinage de $\pm\infty$. On vérifiera notamment que $\mathcal{C}_\lambda$ est asymptote à une parabole quand $\lambda = 0$, et à une droite quand $\lambda \neq 0$. On précisera l'équation de l'asymptote et le placement de la courbe par rapport à celle-ci.

3. (a) Etudier les variations de l'application g_λ définie par $4g_\lambda(x) = \left(\lambda + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|\right)^2 f'_\lambda(x)$.

   (b) En discutant suivant λ, déterminer le signe de f'_λ par intervalles.
   En déduire les tableaux de variation de f_λ dans les cas suivants :
   $\lambda > 2$, $\lambda = 2$, $0 < \lambda < 2$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

   (c) Construire les courbes pour $\lambda = 3$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$, $\lambda = 0$, $\lambda = -2$.