

Polynômes de Chebyshev et théorème de Weierstrass

On se propose d'établir le résultat suivant (théorème de Weierstrass) :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que : $\forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$

Ainsi toute application continue sur un segment peut être approchée uniformément sur ce segment à moins de ε (où ε est un réel strictement positif quelconque) par un polynôme.

Partie I

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul donné.

Pour tout x de $[-1, 1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1. (a) Expliciter $T_n(x)$ si $n = 1$ ou $n = 2$.
 (b) Montrer que pour tout x de $[-1, 1]$, on a : $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.
 (c) Montrer que T_n est un polynôme de degré n . Quel est son coefficient dominant ?
2. (a) Montrer que T_n possède n racines distinctes dans $] -1, 1[$, que l'on calculera.
 On notera a_1, \dots, a_n ces racines, avec $1 > a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > a_n > -1$.
 (b) Avec les notations précédentes, calculer $T'_n(a_k)$ et $T''_n(a_k)$ en fonction de k, n, a_k .
 (c) Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, on note Q_k le polynôme défini par $T_n(x) = (x - a_k)Q_k(x)$.
 Calculer $Q_k(a_k)$ et $Q'_k(a_k)$ en fonction de k, n, a_k .

3. Soit k un élément de $\{1, 2, \dots, n\}$. On rappelle que $\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$
 (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme U_k , de degré $2n - 1$, tel que :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad U_k(a_j) = \delta_{jk} \quad \text{et} \quad U'_k(a_j) = 0.$$

Montrer plus précisément que ce polynôme est donné par : $U_k = \frac{1}{n^2} (1 - a_k x) Q_k^2$.

Indication : montrer que U_k , s'il existe, est nécessairement divisible par Q_k^2 .

- (b) Montrer que $U_k(x) \geq 0$ sur $[-1, 1]$ et que $\sum_{k=1}^n U_k(x) = 1$.

Partie II

Soit f une application continue sur le segment $[-1, 1]$. On pose $M = \sup_{t \in [-1, 1]} |f(t)|$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme F_n tel que :
 $\deg F_n \leq 2n - 1$ et $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \begin{cases} F_n(a_k) = f(a_k) \\ F'_n(a_k) = 0 \end{cases}$
 Indication : on cherchera à exprimer F_n en fonction des polynômes U_k .
2. Dans cette question, ε est un réel strictement positif donné, et x est fixé dans $[-1, 1]$.
 (a) Justifier l'existence d'un réel strictement positif α tel que :

$$\forall (y, z) \in [-1, 1]^2, |y - z| \leq \alpha \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Dans la suite de cette question, on note $J = \{k, 1 \leq k \leq n, |x - a_k| > \alpha\}$.

- (b) Montrer que $|f(x) - F_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum_{k \in J} U_k(x)$ (utiliser I.3.b)
- (c) Prouver que $\sum_{k \in J} U_k(x) \leq \frac{2}{n\alpha^2}$.
3. (a) En déduire qu'il existe un polynôme P tel que $\forall x \in [-1, 1], |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.
- (b) La question précédente établit donc le théorème de Weierstrass sur le segment $[-1, 1]$.
Prouver que ce résultat s'étend à un segment $[a, b]$ quelconque.
4. Ecrire une procédure Maple, sur le modèle `pol:=proc(f,n) . . . end` prenant en argument une fonction f et un entier naturel non nul n . Cette procédure doit calculer le polynôme F_n (avec les notations de la question II.1) puis afficher sur $[-1, 1]$ la courbe représentative de f , celle de F_n (en pointillés) et l'ensemble des points d'abscisse a_k de ces courbes.