Questions d'irrationalité

On notera $\mathscr{I}$ l'ensemble des nombres réels qui sont irrationnels.

1. (a) Soit $A(t) = t^m - c_{m-1}t^{m-1} - \cdots - c_1 t - c_0$, avec $(c_0, \ldots, c_{m-1})$ dans $\mathbb{Z}^m$ et m dans $\mathbb{N}^*$.
   Soit t une racine réelle de A. Montrer que t est ou bien dans $\mathbb{Z}$ ou bien dans $\mathscr{I}$.

   (b) Soit (n, m) dans $\mathbb{N}^2$, avec $m \geqslant 2$. Montrer que $\sqrt[m]{n}$ est dans $\mathbb{N}$, sinon dans $\mathscr{I}$.

   (c) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ puis $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont dans $\mathscr{I}$.

2. Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme $A_n(t) = \dfrac{t^n(1-t)^n}{n!}$.

   (a) Montrer que pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$, on a l'encadrement : $0 \leqslant A_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4^n n!}$.

   (b) Montrer que pout tout m de $\mathbb{N}$, $A_n^{(m)}(0)$ est dans $\mathbb{Z}$.

   (c) En remarquant que $A_n(t) = A_n(1-t)$, montrer qu'il en est de même pour $A_n^{(m)}(1)$.

3. Soit p un entier strictement positif. On va montrer que e^p est un irrationnel.
   Par l'absurde, on pose $\mathrm{e}^p = \dfrac{a}{b}$, où a, b sont dans $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout entier naturel n, on pose $\varphi_n(t) = b\mathrm{e}^{pt} \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k p^{2n-k} A_n^{(k)}(t)$.

   (a) Vérifier que $\varphi_n(0)$ et $\varphi_n(1)$ sont des entiers relatifs.

   (b) Montrer que $\varphi_n'(t) = b\mathrm{e}^{pt} p^{2n+1} A_n(t)$.

   (c) En déduire l'égalité : $\varphi_n(1) - \varphi_n(0) = b\, p^{2n+1} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{pt} A_n(t)\, \mathrm{d}t$

   (d) Majorer $|\varphi_n(1) - \varphi_n(0)|$ en utilisant $(2a)$.
   Aboutir à une contradiction si on choisit n assez grand. Conclusion ?

4. On généralise ici les résultats de la question précédente.

   (a) Montrer que si r est dans $\mathbb{Q}^*$, alors e^r est dans $\mathscr{I}$.

   (b) En déduire que pour tout r de $\mathbb{Q}^{+*}$ (avec $r \neq 1$) le réel $\ln r$ est irrrationnel.

5. Dans cette question, on va montrer que π^2 est irrationnel (il en découle que π est irrationnel.)
   Par l'absurde, on pose $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, où a, b sont dans $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout entier naturel n, on pose $\psi_n(t) = b^n \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} A_n^{(2k)}(t)$.

   (a) Vérifier que $\psi_n(0), \psi_n(1)$ sont entiers.

   (b) On pose $\xi(t) = \psi_n'(t) \sin \pi t - \pi \psi_n(t) \cos \pi t$. Montrer que $\xi'(t) = \pi^2 a^n A_n(t) \sin \pi t$.

   (c) En déduire que $\psi_n(0) + \psi_n(1) = \pi a^n \displaystyle\int_0^1 A_n(t) \sin \pi t\, \mathrm{d}t$.

   (d) Majorer $|\psi_n(1) + \psi_n(0)|$ et aboutir à une contradiction. Conclusion ?

6. On établit ici que le seul rationnel r de $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\cos \pi r$ soit rationnel est $r = \frac{1}{3}$.

   (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme T_n de degré n, à coefficients entiers (de coefficient dominant 2^{n-1}) tel que $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$.

   (b) On pose $r = \dfrac{m}{n}$, et on suppose que $\cos \pi r = \dfrac{p}{q}$, avec $\begin{cases} m \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2,\ m \wedge n = 1 \\ p, q \in \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1 \end{cases}$
   En considérant $\cos n\theta$ avec $\theta = \pi r$ montrer : $\exists\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ q = 2^k$, et que p est impair.

   (c) Par l'absurde, on suppose que l'entier k est strictement supérieur à 1.
   Appliquer ce qui précède à l'angle $\theta_1 = 2\theta$ et prouver que $k < k_1 < n$, avec $k_1 = 2k - 1$.
   Rien n'empêche alors de considérer les angles $\theta_2 = 2\theta_1$, $\theta_3 = 2\theta_2$, etc.
   Conclure à une absurdité, et en déduire que $\cos \pi r = \dfrac{1}{2}$, donc que $r = \dfrac{1}{3}$.