Puissances entières de $z = 0.28 + 0.96i$

Soit Ω l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Soit θ le réel de $[0, 2\pi[$ tel que $\begin{cases} \cos\theta = 0.28 \\ \sin\theta = 0.96 \end{cases}$

1. Pour tout entier naturel p, on pose $z_p = \exp(ip\theta)$.
   (a) Pour tout couple d'entiers p et q, montrer que $|z_p - z_q| = 2\left|\sin(p-q)\frac{\theta}{2}\right|$.
   (b) Calculer $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$. En déduire : $\forall\, p, q \in \mathbb{N},\ |z_p - z_q| \in \mathbb{Q}$.
2. On pose maintenant, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\omega_k = z_{2^k}$ (par exemple $\omega_3 = z_8$).
   (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}(\omega_k) = a_k 10^{-(2^{k+1})}$, où $a_k \in \mathbb{Z} - 10\mathbb{Z}$.
   Indication : noter que $(28+96i)^{2^k} = a_k + ib_k$, où $a_k \equiv 8(10)$, $b_k \equiv 6(10)$.
   (b) En déduire que les ω_k sont distincts deux à deux.
   (c) Montrer que les z_k sont deux à deux distincts.
   (d) En déduire que $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel.
3. Pour tout entier $n \ge 2$, on pose $d_n = \inf\{|z_p - z_q|,\ 0 \le p, q \le n-1,\ p \ne q\}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \ge 2$, $d_n \le 2\sin\frac{\pi}{n}$. En déduire : $\lim\limits_{+\infty} d_n = 0$.
   (b) Soit ε un réel strictement positif donné, et soit c dans Ω.
   Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $|c - z_n| \le \varepsilon$.