Polynômes de Legendre

On définit les suites de polynômes (U_n) et (P_n) de la manière suivante :

$$U_0 = 1 \qquad \forall\, n \geqslant 1,\ U_n = \frac{X^n(X-1)^n}{n!} \qquad \forall\, n \geqslant 0,\ P_n = U_n^{(n)}$$

1. *Quelques propriétés immédiates des polynômes P_n*
   (a) Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.
   Qu'en déduit-on concernant la courbe représentative de P_n ?
   (c) Montrer que P_n est un polynôme de degré n, à coefficients entiers relatifs.
   Préciser les coefficients dominant et constant de P_n, ainsi que $P_n(1)$.

2. *Deux relations vérifiées par les polynômes P_n.*
   (a) Vérifier la relation $(X^2 - X)U_n' = n(2X-1)U_n$.
   En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $(X^2 - X)P_n'' + (2X-1)P_n' - n(n+1)P_n = 0$.
   (b) Vérifier les relations $U_{n+1}' = (2X-1)U_n$ et $U_{n+1}'' = 2(2n+1)U_n + U_{n-1}$.
   En dérivant n fois la première et $n-1$ fois la seconde, prouver que :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)P_{n+1} - (2n+1)(2X-1)P_n + nP_{n-1} = 0.$$

3. *Propriété intégrale des polynômes P_n.*
   (a) Soit n un entier naturel, et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.
   En intégrant par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 U_n(t) f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 P_n(t) f(t)\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, Q \in \mathbb{R}[X],\ \deg(Q) < \deg(P) \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   (b) Par des intégrations par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n(t-1)^m\,\mathrm{d}t$, avec $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
   En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$
   (c) Prouver que pour tous entiers m et n :
   $$\int_0^1 P_n(t)P_m(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ si } m \neq n, \quad \text{et } \int_0^1 P_n^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}.$$

4. *Propriété génératrice des polynômes P_n.*
   (a) Pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$.
   Indication : raisonner par récurrence sur n.
   (b) Avec ces notations, montrer que $\forall\, k \in \{0, \ldots, n\},\ \lambda_k = (2k+1)\displaystyle\int_0^1 P(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t$

5. *Racines des polynômes P_n.*
   Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Dans cette question, on montre par deux méthodes différentes que le polynôme P_n possède n racines distinctes, et que ces racines appartiennent à l'intervalle $]0,1[$.
   (a) *Première méthode :* Soit $\mathcal{S} = \{x_1, \ldots, x_p\}$ l'ensemble éventuellement vide des racines de P_n dans $]0,1[$ et qui ont une multiplicité impaire, avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$.
   Supposer $p < n$ et utiliser (3a) avec $Q = \prod\limits_{k=1}^{p}(X - x_k)$ (et $Q = 1$ si $\mathcal{S} = \emptyset$.)

(b) *Seconde méthode :* Revenir à la définition de P_n utiliser le théorème de Rolle.

6. *Minoration de P_n pour $x \notin [0,1]$*

   Dans la suite de ce problème, n est fixé et strictement positif.

   On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de P_n, rangées dans l'ordre croissant.

   (a) Montrer que pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$ on a $x_{n+1-k} = 1 - x_k$.
   En déduire que $P_n^2 = (\binom{2n}{n})^2 \prod\limits_{k=1}^{n} (x(x-1) + x_k(1-x_k))$.

   (b) Prouver l'inégalité $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$.
   En déduire que si $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$ alors $|P_n(x)| \geqslant \frac{1}{2n+1}\left(4\sqrt{x(x-1)}\right)^n$.

7. *Interpolation polynomiale*

   (a) Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$ montrer qu'il existe un unique polynôme L_k tel que :
   $$\deg(L_k) \leqslant n-1 \qquad L_k(x_k) = 1 \qquad \forall\, j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\},\ L_k(x_j) = 0$$
   On donnera l'expression factorisée du polynôme L_k.

   (b) Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $P = \sum\limits_{k=1}^{n} P(x_k) L_k$.

   (c) Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, on pose $\ell_k = \displaystyle\int_0^1 L_k(t)\,\mathrm{d}t$.
   Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \ell_k P(x_k)$.
   Indication : utiliser la division de P par P_n, ainsi que les questions (3b) et (7b).

   (d) Pour tout j de $\{1,\ldots,n\}$, prouver que $\ell_j > 0$.
   Indication : utiliser la question précédente avec le polynôme $P = L_j^2$.

8. *Quadratures de Gauss*

   On reprend les notations de la question précédente.

   On considère l'approximation $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=1}^{n} \ell_k f(x_k)$, où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue.

   On sait que cette approximation est en fait une égalité si f est un polynôme de degré $\leqslant 2n-1$.

   On se propose d'étudier la qualité de cette approximation quand f est de classe $\mathcal{C}^{2n}$.

   (a) Montrer que : $\exists\,! P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que : $\forall\, k \in \{1,\ldots,n\}$, $\begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$
   Indication : poser $P = QP_n + R$ avec Q, R dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Utiliser (7b).

   (b) Pour tout t de $[0,1]$, montrer qu'il existe c dans $]0,1[$ tel que $f(t) - P(t) = \dfrac{n!^4\, f^{(2n)}(c)}{(2n)!^3} P_n^2(t)$.
   Indication : si $t \notin \{x_1,\ldots,x_n\}$ utiliser $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda P_n(x)^2$ avec $\varphi(t) = 0$.

   (c) On note M_{2n} la borne supérieure de $\left|f^{(2n)}\right|$ sur $[0,1]$.
   Déduire de ce qui précède que $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \ell_k f(x_k)\right| \leqslant \dfrac{M_{2n}\,(n!)^4}{(2n)!^3\,(2n+1)}$

   (d) Application numérique. Que devient le majorant précédent si $n = 5$?

9. Illustrer librement les résultats précédents avec Maple, quand $n = 5$.